



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Neun und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1861.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhalts-Verzeichniss des neun und funfzigsten Bandes.

Druckfehler.

Band 59.

S. 312 Z. 3 v. u. statt Constanten lese man Coefficienten.

Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

§. 1.

Methode zur symbolischen Darstellung algebraischer Formen.

Im 55sten Bande dieses Journals ist Herr *Aronhold* in Bezug auf die Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung mit drei Veränderlichen von einer sehr merkwürdigen symbolischen Ausdrucksweise derselben ausgegangen, welche ganz besonders geeignet scheint die wahren Eigenschaften solcher Formen darzulegen. Ich habe im 58sten Bande dieses Journals p. 117 kurz einen allgemeinen Beweis dafür angedeutet, dass die angegebene symbolische Gestalt nicht nur diesen speciellen Formen, sondern allen Invarianten, Covarianten, Zwischenformen und zugehörigen Formen zukomme, wie gross auch der Grad und die Anzahl der Veränderlichen in der ursprünglichen Function sein mag. Es ist sogar vielleicht zweckmässig, überhaupt diese symbolische Darstellung als Definition solcher Formen zu Grunde zu legen, da alle bisher bekannten Eigenschaften derselben aus dieser Form fast ohne Weiteres hervorgehen, während zugleich neue Eigenschaften und Anwendungen zahlreich daraus entspringen. Solche Anwendungen enthält bereits die Abhandlung des Herrn *Aronhold* in Menge; es ist der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung, namentlich auf den Nutzen aufmerksam zu machen, welchen man für die Theorie der Elimination aus dieser Darstellung ziehen kann.

Die erwähnte Darstellung besteht in Folgendem. Sei J eine beliebige ganze simultane Invariante von homogenen Functionen $\varphi, \psi, \ldots$, deren Ordnungen beliebig sein können, wenn nur die Anzahl der Veränderlichen überall dieselbe ist; d. h. es soll J eine derartige ganze und rationale Function der Coefficienten aller dieser Functionen sein, dass, wenn man in $\varphi, \psi, \ldots$ statt der Veränderlichen lineare Functionen derselben einführt, und in J dann die früheren Coefficienten durch die neuen ersetzt, dieses in dieselbe Function der neuen Coefficienten übergeht, welche es ursprünglich in Bezug auf die alten Coefficienten war, nur multiplicirt mit einer Potenz der aus den Coefficienten jener linearen Substitutionen gebildeten Determinante.

Ersetzt man nun in passender Weise die in J vorkommenden Coefficienten durch symbolische Producte, indem man, durch $m, n, \ldots$ die Ord-

nungen von φ, ψ, ... bezeichnet, die in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_r$ identischen symbolischen Gleichungen einführt:

$$\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^m = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_r x_r)^m = \cdots,$$
$$\psi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r)^m = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r)^m = \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so kann man immer J als ein Aggregat von Determinantenproducten darstellen, in denen die verschiedenen Reihen der einzelnen Determinanten Reihen der symbolischen Coefficienten, z. B.

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_r$$

sind, und wo ausser den in diesen Determinanten enthaltenen symbolischen Coefficienten nur noch numerische Constanten auftreten, in welche die einzelnen Producte multiplicirt sind.

Wenn man diese Darstellungsweise für Invarianten bewiesen hat, so ist sie für zugehörige Formen selbstverständlich. Denn wenn etwa

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_r$$

die Veränderlichen der zugehörigen Form sind, so kann man dieselbe immer als Invariante betrachten, für welche zu den anderen Functionen φ, ψ, ..., aus denen sie gebildet ist, auch noch die Function

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_r x_r$$

hinzutritt. Man hat also dem Obigen nur hinzuzufügen, dass, wenn J eine zugehörige Form wird, auch die Reihe

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_r$$

in einigen der symbolischen Determinanten vorkommen kann.

Aber die Darstellung gilt mit geringer Modification auch für Covarianten und Zwischenformen; und zwar darf man wieder nur von den ersteren sprechen, indem die Zwischenformen zu diesen genau in demselben Verhältniss stehen wie die zugehörigen Formen zu den Invarianten. Bei Covarianten tritt nun zu der Darstellungsweise, welche für Invarianten gegeben wurde, noch dies hinzu, dass die verschiedenen Determinantenproducte mit einigen der symbolischen linearen Ausdrücke

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r,$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r,$$
etc.

oder mit Potenzen derselben multiplicirt erscheinen.

Aber durch eine kurze Ueberlegung zeigt es sich, dass auch dies selbstverständlich ist, sobald der Satz über die Invarianten bewiesen worden. Denn

setzt man, durch die ξ irgend welche r^2 Grössen bezeichnet,

$$\Delta = \Sigma \pm \xi_1 \xi_2' \xi_3^{(2)} \dots \xi_r^{(r-1)}$$

und

$$x_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1}, \quad x_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2}, \quad \dots \quad x_r = \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_r},$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta' &= \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \dots + \xi_r' x_r = 0, \\ \eta^{(2)} &= \xi_1^{(2)} x_1 + \xi_2^{(2)} x_2 + \dots + \xi_r^{(2)} x_r = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta^{(r-1)} &= \xi_1^{(r-1)} x_1 + \xi_2^{(r-1)} x_2 + \dots + \xi_r^{(r-1)} x_r = 0. \end{aligned}$$

Eine jede gegebene Covariante muss nun bis auf einen von der Transformationsdeterminante abhängigen Factor unverändert bleiben, wenn man statt der x lineare Functionen X derselben, und statt der Coefficienten von $\varphi, \psi, \dots$ die nach Einführung der X auftretenden entsprechenden Coefficienten substituirt. Aber zugleich mit den Substitutionen für die x kann man auch an Stelle der ξ solche lineare Ausdrücke derselben Ξ einführen, dass auch

$$\begin{aligned} \eta' &= \Xi_1' X_1 + \Xi_2' X_2 + \dots + \Xi_r' X_r, \\ \eta^{(2)} &= \Xi_1^{(2)} X_1 + \Xi_2^{(2)} X_2 + \dots + \Xi_r^{(2)} X_r, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta^{(r-1)} &= \Xi_1^{(r-1)} X_1 + \Xi_2^{(r-1)} X_2 + \dots + \Xi_r^{(r-1)} X_r, \end{aligned}$$

nnd wenn man dann

$$\nabla = \Sigma \pm \Xi_1 \Xi_2' \dots \Xi_r^{(r-1)}$$

setzt, so ist wieder

$$X_1 = \frac{1}{C} \frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_1}, \quad X_2 = \frac{1}{C} \frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_2}, \quad \dots \quad X_r = \frac{1}{C} \frac{\partial \nabla}{\partial \Xi_r},$$

durch C die Transformationsdeterminante bezeichnet. Die Ξ müssen also in dem neuen Ausdruck der Covariante ganz ebenso vorkommen, wie ursprünglich die ξ, weil die X darin eben so vorkommen sollten wie ursprünglich die x; ausserdem aber erscheint dann bei der transformirten Form der Covariante der Factor $\frac{1}{C}$ eben so oft, als der Grad der Covariante in Bezug auf die x Einheiten hat. Da nun nach der Definition der Covarianten die ursprüngliche und die transformirte sich nur durch eine Potenz der Transformationsdeterminante unterscheiden sollen, so trifft eben dies noch in Bezug auf die beiden Formen zu, in denen einerseits die ξ, andrerseits die Ξ eingeführt sind, nur dass die Potenz der Transformationsdeterminante eine andere geworden ist.

Genau betrachtet ist also die neue Form der Covariante entstanden. indem man die Covariante als simultane Invariante der Functionen φ, ψ, ... η', $\eta^{(2)}$, ... $\eta^{(r-1)}$ angesehen, und statt der ursprünglichen Coefficienten dieser Functionen die neuen, durch die linearen Substitutionen hervorgerufenen gesetzt hat. *Man kann also eine Covariante jederzeit durch eine Invariante ersetzen, indem man den erzeugenden Functionen $r-1$ neue lineare Functionen η hinzufügt.*

Wenn man nun dieser Invariante die oben angeführte Darstellung giebt, so müssen in derselben Determinanten wie

$$\Sigma \pm a_1 \xi_2' \xi_3'' \dots \xi_r^{(r-1)}$$

vorkommen, welche mit anderen, von den ξ unabhängigen Determinanten multiplicirt sind. Da nun die obige Determinante nichts anderes ist als

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r,$$

so zeigt sich, dass wirklich bei den Covarianten nur Factoren dieser letzten Art zu den symbolischen Determinanten hinzutreten können.

Es kommt also nur darauf an, den Satz in aller Strenge für Invarianten zu beweisen. Und dies geschieht am leichtesten, wie ich es im Folgenden auseinandersetzen werde, indem man zugleich die geforderte symbolische Darstellung wirklich leistet. Ich werde mich dabei der Hauptsache nach an den Gang anschliessen, den ich für den Beweis in der erwähnten Abhandlung angedeutet habe.

§. 2.

Zurückführung auf die Betrachtung linearer Functionen.

Bezeichnen wir durch die Buchstaben φ, ψ, ..., an welche man sich beliebige untere Indices angebracht denke, zugleich die Coefficienten der homogenen Functionen, die oben durch φ, ψ, ... bezeichnet wurden; und sei $J(\varphi, \psi, \dots)$ eine gegebene ganze simultane Invariante dieser Functionen und eine homogene Function sowohl der Coefficienten φ als der Coefficienten ψ u. s. w. Denn sollte J aus mehreren Theilen bestehen, für welche zusammen diese Homogeneität in Bezug auf die Coefficienten *jeder* der Functionen nicht erfüllt wäre, so müsste jeder einzelne Theil, für welchen sie stattfände, für sich eine Invariante sein, und man würde dann jeden dieser Theile abgesondert betrachten.

In Folge der linearen Substitutionen

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = c_1' X' + c_1'' X'' + \cdots + c_1^{(r)} X^{(r)}, \\ x_2 = c_2' X' + c_2'' X'' + \cdots + c_2^{(r)} X^{(r)}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_r = c_r' X' + c_r'' X'' + \cdots + c_r^{(r)} X^{(r)} \end{cases}$$

mögen nun $\varphi, \psi, \ldots$ übergehen in $\Phi, \Psi, \ldots$. Ist dann noch

$$C = \Sigma \pm c_1' c_2'' \ldots c_r^{(r)},$$

so wird J als Invariante definirt durch die Gleichung:

$$(2.)\quad J(\Phi, \Psi, \ldots) = C^\varrho . J(\varphi, \psi, \ldots),$$

wo ϱ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnen kann.

Variiren wir in der vorstehenden Gleichung jetzt die Coefficienten φ, wodurch also auch die Φ Veränderungen erleiden, während die c constant bleiben sollen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Sigma \frac{\partial J(\Phi, \Psi, \ldots)}{\partial \Phi} \delta \Phi = C^\varrho . \Sigma \frac{\partial J(\varphi, \psi, \ldots)}{\partial \varphi} \delta \varphi.$$

Betrachten wir jetzt die $\delta\Phi$ und $\delta\varphi$ als Coefficienten einer neuen Function. welche von demselben Grade wie φ ist, so stellt die Summe

$$\Sigma \frac{\partial J}{\partial \varphi} \delta \varphi$$

offenbar der obigen Gleichung wegen wiederum eine simultane Invariante von $\varphi, \psi, \ldots$ und dieser neuen Function dar. Und umgekehrt geht diese neue Invariante in die frühere über, multiplicirt mit einer reinen Zahl, sobald man die neue Function wieder in φ selbst übergehen lässt.

Variirt man die neue Invariante wieder in Bezug auf die noch darin enthaltenen Coefficienten von φ, und setzt an Stelle der Variationen die Coefficienten einer neuen Function, welche abermals von demselben Grade wie φ ist, so erhält man eine neue simultane Invariante, welche ausser φ noch zwei neue Functionen derselben Ordnung enthält, deren Coefficienten in der Invariante nur auf lineare Weise vorkommen.

So kann man offenbar fortfahren, bis sämmtliche Coefficienten von φ aus der Invariante verschwunden sind. Man hat dann eine neue Invariante vor sich, welche die Coefficienten von eben so viel neuen Functionen von gleicher Ordnung mit φ enthält, als der Grad der ursprünglichen Invariante in Bezug auf die φ betrug; und von welcher man in jedem Augenblicke zu J, multiplicirt mit einem numerischen Factor, zurückkehren kann, indem man

diese neue Function in φ übergehen lässt, d. h. indem man statt ihrer Coefficienten die Coefficienten von φ schreibt.

Durch ähnliche Operationen gelingt es die Coefficienten von ψ fortzuschaffen, so wie von allen anderen Functionen, welche bei der Bildung von J etwa noch benutzt sein sollten. Und so erhält man eine symbolische Darstellung von J durch eine neue Invariante, welche sich auf eine grössere Anzahl von Functionen bezieht, welche für jede von diesen linear ist, und welche, sobald man dieselben gruppenweise in φ, ψ, ... übergehen lässt, in J übergeht, multiplicirt mit einem numerischen Factor.

An Stelle der neu eingeführten Functionen kann man jede beliebige in Buchstabengrössen ausgedrückte Function von passendem Grade setzen, da man von solchen immer zu den ursprünglichen Functionen zurückzukehren im Stande ist. So kann man, wie hier geschehen soll, *als solche neue Functionen immer Potenzen linearer Ausdrücke einführen,* z. B.

$$\delta\varphi = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r)^m;$$

und die neue Invariante wird dann offenbar eine simultane Invariante nicht blos dieser Potenzen sondern auch der linearen Ausdrücke selbst sein, für deren Coefficienten sie respective von der m^{ten}, n^{ten}, etc. Ordnung ist. Und man kann immer aus der neuen Form zu der ursprünglichen Invariante zurückkehren, indem man an Stelle der Producte

$$a_i a_k a_h \ldots, \quad \text{etc.},$$

welche in der Entwickelung des Ausdrucks

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r)^m \quad \text{etc.}$$

als Coefficienten auftreten, die entsprechenden Coefficienten von φ setzt. *Man kann also jede Invariante als simultane Invariante linearer Ausdrücke symbolisch darstellen.*

Während hier die ursprüngliche Invariante zunächst auf eine andere zurückgeführt wurde, welche eine grössere Anzahl von Functionen enthielt, aber in Bezug auf die Coefficienten einer jeden linear war, kann man ganz ebenso diese symbolische Form zurückführen auf eine neue, *welche sich auf eben so viel lineare Functionen bezieht, als ihre Ordnung in Bezug auf sämmtliche Coefficienten Einheiten enthält, und welche für die Coefficienten einer jeden linear ist.* Und von dieser kehrt man leicht zu der gegebenen Invariante, multiplicirt mit einem numerischen Factor, wieder zurück, indem man zunächst diese linearen Ausdrücke gruppenweise einander gleich werden

lässt, nach der Ausrechnung aber die Producte der Coefficienten durch die Coefficienten der ursprünglich gegebenen Functionen in passender Weise ersetzt.

Diese Vorbereitungen angenommen, werde ich nun zeigen wie die zuletzt angegebene Form, d. h. jede simultane Invariante von linearen Functionen, welche die Coefficienten einer jeden nur auf lineare Weise enthält, als Aggregat von Determinantenproducten dargestellt werden kann; wodurch denn zugleich erhellt, wie überhaupt jede Invariante eine symbolische Darstellung dieser Art zulässt.

§. 3.

Invarianten und Covarianten linearer Functionen.

Betrachten wir eine simultane Invariante der folgenden $\varrho . r$ linearen Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} a^{(1)} = a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + \cdots + a_r^{(1)} x_r, \\ a^{(2)} = a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + \cdots + a_r^{(2)} x_r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^{(r\varrho)} = a_1^{(r\varrho)} x_1 + a_2^{(r\varrho)} x_2 + \cdots + a_r^{(r\varrho)} x_r, \end{cases}$$

welche linear sein soll in Bezug auf die Coefficienten jeder dieser Functionen, und sei dieselbe kurz durch $J(a)$ bezeichnet. Führt man in den linearen Ausdrücken (3.) statt der Veränderlichen x neue Veränderliche X ein, welche mit den vorigen durch die linearen Substitutionsformeln (1.) des §. 2 zusammenhängen, so wird:

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= a_1^{(i)} (c_1' X' + c_1'' X'' + \cdots + c_1^{(r)} X^{(r)}) \\ &\quad + a_2^{(i)} (c_2' X' + c_2'' X'' + \cdots + c_2^{(r)} X^{(r)}) \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad + a_r^{(i)} (c_r' X' + c_r'' X'' + \cdots + c_r^{(r)} X^{(r)}) \\ &= A_1^{(i)} X' + A_2^{(i)} X^{(2)} + \cdots + A_r^{(i)} X^{(r)}, \end{aligned}$$

wo

$$A_k^{(i)} = a_1^{(i)} c_1^{(k)} + a_2^{(i)} c_2^{(k)} + \cdots + a_r^{(i)} c_r^{(k)}$$

gesetzt ist. Versteht man also unter $J(A)$ den Ausdruck, in welchen $J(a)$ übergeht, sobald statt der $a_k^{(i)}$ darin die $A_k^{(i)}$ eingeführt werden, so ist die Gleichung, welche J als Invariante definirt:

$$J(A) = C^{\varrho} . J(a) \ {}^{*}).$$

*) Dieser Gleichung wegen muss, damit der Factor C^{ϱ} sich wirklich ausscheiden kann, die Anzahl der constituirenden Functionen, wie oben angenommen ist, $r.\varrho$ sein, welches die Dimension der c in C^{ϱ} angiebt.

Auf der rechten Seite kommen hier die Grössen c nur in dem Factor C^ϱ vor. Differentiirt man also diese Gleichung wiederholt nach verschiedenen der c, was im Ganzen $r.\varrho$ mal hinter einander geschehen kann, so kann man folgende identische Gleichung bilden:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} . \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} \\ = J(a) \dfrac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} . \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} . \end{cases}$$

In derselben bedeuten

$$k_1',\ k_2',\ \dots\ k_r',\quad k_1'',\ k_2'',\ \dots\ k_r'',\quad \dots\quad k_1^\varrho,\ k_2^\varrho,\ \dots\ k_r^\varrho$$

irgend welche der Zahlen 1, 2, ... r; und da in C^ϱ die c nur bis zur $r.\varrho^{\text{ten}}$ Dimension ansteigen, so unterscheidet sich die rechte Seite dieser Gleichung von $J(a)$ nur durch einen numerischen Factor.

Ich multiplicire jetzt die obige Gleichung mit dem Product der Determinanten:

$$\begin{aligned} &\Sigma \pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'} \dots c_r^{k_r'} \\ \times &\Sigma \pm c_1^{k_1''} c_2^{k_2''} \dots c_r^{k_r''} \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \times &\Sigma \pm c_1^{k_1^\varrho} c_2^{k_2^\varrho} \dots c_r^{k_r^\varrho} . \end{aligned}$$

Diese sind sämmtlich so zu bilden, dass die oberen Indices als fest angesehen werden, die unteren aber in bekannter Weise zu permutiren sind. Dieses Product ist immer Null, sobald irgend in einer der Reihen

$$k_1^{(i)},\quad k_2^{(i)},\quad \dots\quad k_r^{(i)}$$

zwei gleiche Indices vorkommen, und hat also nur einen Werth, wenn sämmtliche Reihen dieser Art die Zahlen 1, 2, ... r in beliebiger Reihenfolge darstellen; dann aber ist jede Determinante gleich $+C$ oder gleich $-C$, jenachdem die entsprechende Reihe

$$k_1^{(i)},\quad k_2^{(i)},\quad \dots\quad k_r^{(i)}$$

eine positive oder negative Transformation der Reihe

$$1,\quad 2,\quad \dots\quad r$$

ist. Bezeichnet man durch

$$\varepsilon_{k_1^i, k_2^i, \dots k_r^i}$$

die Null oder die positive oder negative Einheit, jenachdem einige der k ein-

ander gleich, oder, wenn alle ungleich sind, die Reihe

$$k_1^i,\quad k_2^i,\quad \dots\ k_r^i$$

durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Permutationen aus der Reihe

$$1,\quad 2,\quad \dots\ r$$

hervorgeht, so ist

$$\Sigma \pm c_1^{k_1^i} c_2^{k_2^i} \dots c_r^{k_r^i} = \varepsilon_{k_1^i,\, k_2^i, \dots k_r^i} \,.\, C,$$

und also obiges Determinantenproduct gleich

$$\varepsilon_{k_1',\, k_2', \dots k_r'} \,.\, \varepsilon_{k_1'',\, k_2'', \dots k_r''} \dots \varepsilon_{k_1^\varrho,\, k_2^\varrho, \dots k_r^\varrho} \,.\, C^\varrho.$$

Hat man nun die Gleichung (4.) mit diesem Ausdruck multiplicirt, und summirt alle Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, indem man jeder der Zahlen $k_1', k_2', \dots k_r^\varrho$ jeden der Werthe $1, 2, \dots r$ in allen nur möglichen Combinationen beilegt, so erhält man die Gleichung:

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} \,.\, \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} \\ \times \Sigma \pm c_1^{k_1'} c_2^{k_2'} \dots c_r^{k_r'} \,.\, \Sigma \pm c_1^{k_1''} c_2^{k_2''} \dots c_r^{k_r''} \dots \Sigma \pm c_1^{k_1^\varrho} c_2^{k_2^\varrho} \dots c_r^{k_r^\varrho} \end{array} \right\} \\ = C^\varrho . J(a) . \Sigma \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k_1'} \partial c_2^{k_2'} \dots \partial c_r^{k_r'} \,.\, \partial c_1^{k_1''} \partial c_2^{k_2''} \dots \partial c_r^{k_r''} \dots \partial c_1^{k_1^\varrho} \partial c_2^{k_2^\varrho} \dots \partial c_r^{k_r^\varrho}} \\ \times \varepsilon_{k_1',\, k_2', \dots k_r'} \,.\, \varepsilon_{k_1'',\, k_2'', \dots k_r''} \dots \varepsilon_{k_1^\varrho,\, k_2^\varrho, \dots k_r^\varrho} \end{array} \right\}, \end{array}\right.$$

wo die Summenzeichen sich auf sämmtliche den k zu ertheilende Werthe erstrecken.

Ich betrachte zuerst den linken Theil dieser Gleichung genauer, indem ich die nach den c, welche in $J(A)$ explicite nicht vorkommen, auszuführenden Differentiationen auf Differentiationen nach den A zurückführe. Aus der Definition der A folgt, dass

$$\frac{\partial A_k^{(i)}}{\partial c_h^{(k)}} = a_h^{(i)},$$

während diejenigen A, deren unterer Index von k verschieden ist, $c_h^{(k)}$ gar nicht enthalten. Bezieht sich also das zweite Summenzeichen darauf, dass sämmtlichen Indices i der Reihe nach die Werthe $1, 2, \dots r\varrho$ sollen beigelegt werden können, so geht die linke Seite der Gleichung (5.) in folgende Form über:

$$(6.)\qquad \Sigma\Sigma\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k_1'}^{i_1'}\partial A_{k_2'}^{i_2'}\dots\partial A_{k_r'}^{i_r'}.\partial A_{k_1''}^{i_1''}\partial A_{k_2''}^{i_2''}\dots\partial A_{k_r''}^{i_r''}\dots\partial A_{k_1^\varrho}^{i_1^\varrho}\partial A_{k_2^\varrho}^{i_2^\varrho}\dots\partial A_{k_r^\varrho}^{i_r^\varrho}}\\ \times a_1^{i_1'}a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}.\Sigma\pm c_1^{k_1'}c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}\\ \times a_1^{i_1''}a_2^{i_2''}\dots a_r^{i_r''}.\Sigma\pm c_1^{k_1''}c_2^{k_2''}\dots c_r^{k_r''}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \times a_1^{i_1^\varrho}a_2^{i_2^\varrho}\dots a_r^{i_r^\varrho}.\Sigma\pm c_1^{k_1^\varrho}c_2^{k_2^\varrho}\dots c_r^{k_r^\varrho}.\end{array}\right.$$

Der in der Doppelsumme enthaltene Differentialquotient ändert sich offenbar nicht, wenn man in den beiden Reihen

$$\begin{array}{l}i_1',\ i_2',\ \dots\ i_r',\quad i_1'',\ i_2'',\ \dots\ i_r'',\quad \dots\quad i_1^\varrho,\ i_2^\varrho,\ \dots\ i_r^\varrho\\ k_1',\ k_2',\ \dots\ k_r',\quad k_1'',\ k_2'',\ \dots\ k_r'',\quad \dots\quad k_1^\varrho,\ k_2^\varrho,\ \dots\ k_r^\varrho\end{array}$$

gleichzeitig entsprechende Vertauschungen vornimmt, so dass nur niemals zwei unter einander stehende Indices getrennt werden. Eine solche Vertauschung kann auf den Werth der Doppelsumme überhaupt keinen Einfluss haben, da sie nur die Bezeichnungsweise verändert. Die durch eine solche Vertauschung entstehenden neuen Formen der Doppelsumme müssen also immer das nämliche Resultat ergeben. Man bemerkt jedoch, dass z. B. eine Vertauschung entsprechender Indices aus den Reihen

$$\begin{array}{l}i_1',\ i_2',\ \dots\ i_r'\\ k_1',\ k_2',\ \dots\ k_r'\end{array}$$

genau denselben Erfolg hat, als wenn in dem Product

$$a_1^{i_1'}a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}.\Sigma\pm c_1^{k_1'}c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}$$

einige der unteren Indices $1, 2,\dots r$ ihre Stellen wechseln. Durch solche Vertauschungen kann man aber aus diesem Product im Ganzen $r! = 1.2\dots r$ Producte ableiten; und da der Factor

$$\Sigma\pm c_1^{k_1'}c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}$$

bei jeder einzelnen Vertauschung nur sein Zeichen wechselt, so sind die entstehenden Producte offenbar keine anderen als die Glieder des Products

$$\Sigma\pm a_1^{i_1'}a_2^{i_2'}\dots a_r^{i_r'}.\Sigma\pm c_1^{k_1'}c_2^{k_2'}\dots c_r^{k_r'}.$$

Indem man also alle diese Vertauschungen vornimmt, und die entstehenden

Formen der Doppelsumme (6.) addirt, erhält man als $r!$fachen Werth derselben eine ganz ähnliche Doppelsumme, welche sich von der obigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Products

$$a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} . \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

das Product

$$\Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} . \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

getreten ist.

Nimmt man jetzt die ähnlichen Vertauschungen bei der zweiten Gruppe der Indices

$$\begin{matrix} i''_1, & i''_2, & \dots & i''_r \\ k''_1, & k''_2, & \dots & k''_r \end{matrix}$$

und bei allen folgenden Gruppen vor, so erhält man für die Doppelsumme (6.) demnach folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{(r!)^\varrho} \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k'_1}^{i'_1} \partial A_{k'_2}^{i'_2} \dots \partial A_{k'_r}^{i'_r} . \partial A_{k''_1}^{i''_1} \partial A_{k''_2}^{i''_2} \dots \partial A_{k''_r}^{i''_r} \dots \partial A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1} \partial A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots \partial A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r}} \\ \times \Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} . \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r} \\ \times \Sigma \pm a_1^{i''_1} a_2^{i''_2} \dots a_r^{i''_r} . \Sigma \pm c_1^{k''_1} c_2^{k''_2} \dots c_r^{k''_r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \times \Sigma \pm a_1^{i^\varrho_1} a_2^{i^\varrho_2} \dots a_r^{i^\varrho_r} . \Sigma \pm c_1^{k^\varrho_1} c_2^{k^\varrho_2} \dots c_r^{k^\varrho_r} \end{array} \right\}.$$

Aber nach einem bekannten Determinantensatz kann man ein Product wie

$$\Sigma \pm a_1^{i'_1} a_2^{i'_2} \dots a_r^{i'_r} . \Sigma \pm c_1^{k'_1} c_2^{k'_2} \dots c_r^{k'_r}$$

zu einer einzigen Determinante vereinigen, deren Elemente offenbar keine anderen als die Grössen A sind, so dass obiges Product übergeht in

$$\Sigma \pm A_{k'_1}^{i'_1} A_{k'_2}^{i'_2} \dots A_{k'_r}^{i'_r}.$$

Und hierdurch nimmt endlich obige Doppelsumme folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{(r!)^\varrho} \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A_{k'_1}^{i'_1} \partial A_{k'_2}^{i'_2} \dots \partial A_{k'_r}^{i'_r} . \partial A_{k''_1}^{i''_1} \partial A_{k''_2}^{i''_2} \dots \partial A_{k''_r}^{i''_r} \dots \partial A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1} \partial A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots \partial A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r}} \\ \times \Sigma \pm A_{k'_1}^{i'_1} A_{k'_2}^{i'_2} \dots A_{k'_r}^{i'_r} . \Sigma \pm A_{k''_1}^{i''_1} A_{k''_2}^{i''_2} \dots A_{k''_r}^{i''_r} \dots \Sigma \pm A_{k^\varrho_1}^{i^\varrho_1} A_{k^\varrho_2}^{i^\varrho_2} \dots A_{k^\varrho_r}^{i^\varrho_r} \end{array} \right\}.$$

Ich gehe jetzt zum rechten Theile der Gleichung (5.) über. Hier ist zunächst

$$C^\varrho . J(a) = J(A).$$

Was aber den Differentialquotienten von C^ϱ betrifft, so enthält derselbe jedenfalls das Glied

$$\varepsilon_{k'_1, k'_2, \dots k'_r} \cdot \varepsilon_{k''_1, k''_2, \dots k''_r} \dots \varepsilon_{k^\varrho_1, k^\varrho_2, \dots k^\varrho_r} \cdot \varrho!,$$

und man erhält den Differentialquotienten selbst, indem man diejenigen Indices in diesem Gliede auf alle Weise vertauscht, welche zu Grössen c mit gleichen unteren Indices gehören, und die Summe aller entstehenden Ausdrücke nimmt. Ich bezeichne diese der Kürze wegen durch

$$\varrho! \,.\, \sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}.$$

In der Gleichung (5.) erscheint dieser Differentialquotient multiplicirt mit

$$\varepsilon_{k'_1, k'_2, \dots k'_r} \cdot \varepsilon_{k''_1, k''_2, \dots k''_r} \dots \varepsilon_{k^\varrho_1, k^\varrho_2, \dots k^\varrho_r}.$$

Aber da derselbe ungeändert bleibt, wenn man die verschiedenen k mit einander vertauscht, deren c denselben unteren Index haben, so ist in der Summe der rechten Seite von (5.) dieser Differentialquotient nicht nur mit dem oben bezeichneten Factor multiplicirt, sondern auch noch mit allen, welche durch Vertauschung solcher Indices k aus demselben hervorgehen. Und da eben diese Summe oben durch $\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}$ bezeichnet wurde, so ist in (5.) das Aggregat aller derjenigen Terme, welche diesen Differentialquotienten enthalten,

$$\varrho! \,.\, \left(\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}\right)^2,$$

und mithin die ganze rechte Seite von (5.) gleich

$$\varrho! \,.\, J(A) \,.\, \Sigma\left(\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r}\right)^2,$$

wo die Summe auf alle möglichen Combinationen auszudehnen ist, welche an Stelle der Reihe k'_1, k'_2, ... k^ϱ_r treten können.

Die angegebene Darstellung des Coefficienten von $J(A)$ ist insofern von Wichtigkeit, als sie zeigt, dass derselbe niemals verschwinden kann. Denn man sieht leicht, dass mindestens eines der Quadrate, in deren Summe sich dieser Coefficient auflöst, von Null verschieden ist. Setzt man z. B. alle k gleich ihrem unteren Index, so findet man das zugehörige σ leicht aus der oben

entwickelten Gleichung

$$\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r} = \frac{1}{\varrho!} \cdot \frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{\partial c_1^{k'_1} \partial c_2^{k'_2} \dots \partial c_r^{k'_r} . \partial c_1^{k''_1} \partial c_2^{k''_2} \dots \partial c_r^{k''_r} \dots},$$

deren rechte Seite für diesen Fall in

$$\frac{1}{\varrho!} \cdot \frac{\partial^{r\varrho} C^\varrho}{(\partial c'_1)^\varrho (\partial c''_2)^\varrho \dots (\partial c^r_r)^\varrho}$$

übergeht. Der Differentialquotient ist hier leicht zu berechnen, da er nur von dem in C^ϱ enthaltenen Gliede

$$(c'_1 c''_2 \dots c^r_r)^\varrho$$

herrühren kann; und man erhält sonach für das fragliche σ:

$$\frac{1}{\varrho!} (\varrho!)^r = (\varrho!)^{r-1}.$$

Es ist also mindestens dies σ von Null verschieden, und der oben gegebene Coefficient von $J(A)$ kann sonach niemals verschwinden.

Und indem wir jetzt die umgeformten Ausdrücke beider Theile in die Gleichung (5.) einführen, erhalten wir:

$$(7.) \quad \left\{ \begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\varrho!} \cdot \frac{1}{(r!)^2} \cdot \frac{1}{\Sigma \left(\sigma_{k'_1, k'_2, \dots k^\varrho_r} \right)^2} \\ &\times \Sigma\Sigma \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^{r\varrho} J(A)}{\partial A^{i'_1}_{k'_1} \partial A^{i'_2}_{k'_2} \dots \partial A^{i'_r}_{k'_r} . \partial A^{i''_1}_{k''_1} \partial A^{i''_2}_{k''_2} \dots \partial A^{i''_r}_{k''_r} \dots \partial A^{i^\varrho_1}_{k^\varrho_1} \partial A^{i^\varrho_2}_{k^\varrho_2} \dots \partial A^{i^\varrho_r}_{k^\varrho_r}} \\ & \times \Sigma \pm A^{i'_1}_{k'_1} A^{i'_2}_{k'_2} \dots A^{i'_r}_{k'_r} . \Sigma \pm A^{i''_1}_{k''_1} A^{i''_2}_{k''_2} \dots A^{i''_r}_{k''_r} \dots \Sigma \pm A^{i^\varrho_1}_{k^\varrho_1} A^{i^\varrho_2}_{k^\varrho_2} \dots A^{i^\varrho_r}_{k^\varrho_r} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung enthält die Darstellungsweise, von welcher anfänglich die Rede war. Denn der Differentialquotient auf der rechten Seite ist eine reine Zahl, oder wenigstens von den A, welche als Argumente der Invariante betrachtet werden, unabhängig. Die Invariante wird also wirklich gleich einem Aggregat von Determinantenproducten, wie es verlangt wurde. Ich fasse diese Darstellung zusammen in folgendem

Theorem I.

Ist J eine simultane Invariante von $r.\varrho$ linearen Functionen mit r Veränderlichen, in welcher die Coefficienten jeder Function nur auf lineare

Weise vorkommen, so differentiire man dieselbe $r.\varrho$mal nach irgend welchen $r.\varrho$ der $r^2.\varrho$ in diesen Functionen enthaltenen Coefficienten, deren untere Indices ϱmal die Reihe 1, 2 ... r, und deren obere Indices die Reihe 1, 2 ... $r.\varrho$ in beliebiger Folge bilden. Sodann sondere man dieselben $r.\varrho$ Coefficienten in ϱ Gruppen, in deren jeder die unteren Indices 1, 2 ... r enthalten sind, und setze statt jeder Gruppe die Determinante, deren Glieder durch Vertauschung der unteren Indices aus der Gruppe hervorgehen. Multiplicirt man dann diese Determinanten mit jenem Differentialquotienten, und bildet alle nur möglichen Producte dieser Art, so unterscheidet ihre Summe sich von J nur durch einen numerischen Factor.

Da die numerischen Werthe der gedachten Differentialquotienten vollkommen beliebig sein können, sobald von J nichts als die Ordnung festgesetzt ist, so kann man den Satz hinzufügen:

Theorem II.

Die allgemeinste simultane Invariante der $r.\varrho^{ten}$ Ordnung von $r.\varrho$ linearen Functionen, welche in Bezug auf die Coefficienten einer jeden linear ist, erhält man, indem man die Determinanten bildet, welche sich aus den Coefficienten der Functionen zusammensetzen lassen, immer ϱ von denselben multiplicirt, so aber, dass in einem solchen Product jede Coefficientenreihe einmal vorkommt, und indem man dann diese Producte addirt, mit beliebigen numerischen Factoren versehen.

Den früheren Betrachtungen zufolge ist hierdurch auch die symbolische Form aller simultanen Invarianten beliebiger Functionen gegeben, und man kann demnach deren eben so viel von einer bestimmten Ordnung bilden, als willkürliche Coefficienten in den Formen des zweiten Theorems auftreten. Aber es ist dabei zu bemerken, dass von diesen sehr zahlreichen Invarianten, indem man zunächst einige Gruppen der linearen Functionen zusammenfallen lässt, und indem man sodann diese wieder durch symbolische Substitutionen auf die Coefficienten von Functionen gegebener Ordnungen zurückführt, eine grosse Zahl, oft sogar alle, verschwinden, während andere durch Bedingungsgleichungen mit einander verbunden sind, welche schon in Bezug auf die ursprüngliche symbolische Form dadurch eintreten, dass gewisse identische Gleichungen zwischen den constituirenden Determinanten bestehen. Es scheint daher sehr schwierig a priori die Zahl der möglichen von einander unabhängigen Invarianten gegebener Functionen und von gegebener Ordnung zu bestimmen.

Bei der symbolischen Darstellung von Covarianten treten nach dem Obigen zu den Determinantenproducten noch lineare Factoren; und man kann daher in Bezug auf diese folgendes Theorem aufstellen:

Theorem III.

Die allgemeinste ganze Covariante linearer Functionen ist eine Summe von Invarianten, jede multiplicirt mit Potenzen der Functionen selbst;

woraus man denn wieder im Stande ist, auch die allgemeinsten simultanen Covarianten nicht linearer Functionen zu bilden.

§. 4.

Beweis eines allgemeinen Theorems über simultane Invarianten.

Um eine allgemeine Anwendung dieser symbolischen Formen zu geben, will ich einen sehr allgemeinen, auf Invarianten (und zugehörige Formen) bezüglichen Satz nachweisen, welcher für specielle Werthe von r und für Invarianten *einer* Function bekannt ist.

Sei also J zunächst eine simultane Invariante der $r.\varrho$ oben angegebenen linearen Functionen, wie sie in §. 3 betrachtet ist. Stellt man dieselbe als Aggregat von Determinantenproducten dar, und setzt dann in einem Factor jedes Products statt der a mit unterem Index h die a mit unterem Index k, wo h von k verschieden ist, so verschwindet J identisch. Hieraus und aus der Bemerkung, dass J für die Coefficienten jeder Function linear ist, für die a mit einem bestimmten unteren Index aber homogen und von der ϱ^{ten} Ordnung, ergiebt sich leicht die Richtigkeit der folgenden beiden Gleichungen:

$$\Sigma_i \frac{\partial J}{\partial a_h^i} a_h^i = \varrho . J,$$

$$\Sigma_i \frac{\partial J}{\partial a_h^i} a_k^i = 0,$$

die Summe von $i = 1$ bis zu $i = r.\varrho$ ausgedehnt. Diese Gleichungen bleiben aber auch noch bestehen, wenn von den linearen Functionen einige einander gleich werden, und in die Summen sind dann nur soviel Glieder einzuführen, als verschiedene Gruppen unter den linearen Functionen vorkommen. Ich nehme an, dass der Reihe nach m, n, p etc. Functionen einander gleich werden, wo dann $m+n+p \ldots = r.\varrho$, und bezeichne die Coefficienten derselben respective durch $a, b, c, \ldots.$ Die vorhergehenden Gleichungen werden also dann zu folgenden:

$$\frac{\partial J}{\partial a_h} a_h + \frac{\partial J}{\partial b_h} b_h + \frac{\partial J}{\partial c_h} c_h + \cdots = \varrho . J,$$
$$\frac{\partial J}{\partial a_h} a_k + \frac{\partial J}{\partial b_h} b_k + \frac{\partial J}{\partial c_h} c_k + \cdots = 0.$$

Führt man nun statt der Producte

$$(a_1)^{\alpha_1} (a_2)^{\alpha_2} \ldots, \quad (b_1)^{\beta_1} (b_2)^{\beta_2} \ldots, \quad \text{etc.}$$

Coefficienten von Functionen m^{ter}, n^{ter} etc. Ordnung $\varphi, \psi, \ldots$ ein, indem man die symbolischen Gleichungen

$$(a_1)^{\alpha_1} (a_2)^{\alpha_2} \ldots = a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots},$$
$$(b_1)^{\beta_1} (b_2)^{\beta_2} \ldots = b_{\beta_1 \beta_2 \ldots}$$

annimmt, so wird J eine simultane Invariante von $\varphi, \psi, \ldots$, und zwar linear in Bezug auf die Coefficienten einer jeden dieser Functionen. Man sieht dann aber, indem man beide Ausdrucksweisen von J, die wirkliche und die symbolische, mit einander vergleicht, ohne Weiteres die Gleichungen ein:

$$\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}} = \frac{\partial^m J}{(\partial a_1)^{\alpha_1} (\partial a_2)^{\alpha_2} \ldots},$$
$$\beta_1 ! \, \beta_2 ! \ldots \frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1 \beta_2 \ldots}} = \frac{\partial^n J}{(\partial b_1)^{\beta_1} (\partial b_2)^{\beta_2} \ldots},$$

. . . .

Da J eine homogene Function m^{ter} Ordnung der a ist, so hat man bekanntlich:

$$J = \Sigma \frac{(a_1)^{\alpha_1} (a_2)^{\alpha_2} \ldots}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots} \cdot \frac{\partial J}{(\partial a_1)^{\alpha_1} (\partial a_2)^{\alpha_2} \ldots}$$

oder nach dem Vorigen:

$$J = \Sigma (a_1)^{\alpha_1} (a_2)^{\alpha_2} \ldots \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}},$$

wo die Summe sich auf alle Combinationen der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ erstreckt, welche aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots m$ mit Wiederholungen gebildet werden können. Daher ist auch

$$\frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma \frac{\alpha_h}{a_h} \cdot (a_1)^{\alpha_1} (a_2)^{\alpha_2} \ldots \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}},$$

und wenn man wieder die symbolischen Substitutionen berücksichtigt:

$$a_h \frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}},$$

hingegen, wenn k von h verschieden ist:

$$a_k \frac{\partial J}{\partial a_h} = \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h - 1 \dots \alpha_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \dots \alpha_k \dots}}.$$

Setzt man diese Werthe, so wie die entsprechenden, für die Functionen ψ etc. zu bildenden Ausdrücke in die Anfangs gegebenen Gleichungen ein, so werden diese:

$$\begin{aligned}
\varrho . J &= \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}} \\
&+ \Sigma \beta_h . b_{\beta_1 \beta_2 \dots} \frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1 \beta_2 \dots}} \\
&\dots\dots\dots \\
0 &= \Sigma \alpha_h . a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h - 1 \dots \alpha_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \dots \alpha_k \dots}} \\
&+ \Sigma \beta_h . b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_h - 1 \dots \beta_k + 1 \dots} \frac{\partial J}{\partial b_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_h \dots \beta_k \dots}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestehen, wie man leicht übersieht, auch dann noch fort, wenn einige der Functionen φ, ψ, ... einander gleich werden, d. h. wenn die Invariante aufhört, in Bezug auf die Coefficienten jeder der Functionen linear zu sein. Aber dann sind nur soviel Summen hinzuschreiben, als von einander verschiedene Functionen vorhanden sind.

Die in diesen Gleichungen ausgesprochenen Resultate fasse ich zusammen in das folgende

Theorem IV.

Bezeichnen wir die Coefficienten der Functionen φ, ψ, ... so, dass wir diese Functionen aus den Ausdrücken

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r)^m,$$
$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_r x_r)^n,$$
$$\dots\dots\dots$$

durch die symbolischen Substitutionen

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots = a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$$
$$b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots = b_{\beta_1 \beta_2 \dots}$$

entstehen lassen; wo also $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$ in der Function ψ mit $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ und in

einen aus der polynomischen Entwicklung entspringenden numerischen Factor multiplicirt ist. Differentiiren wir dann eine simultane Invariante dieser Functionen der Reihe nach in Bezug auf alle Coefficienten derselben, und multipliciren jeden Differentialquotienten mit dem h^{ten} *Index desjenigen Coefficienten, nach welchem differentiirt wurde. Multiplicirt man endlich diese Differentialquotienten wieder mit den Coefficienten selbst, und addirt sämmtliche Producte, so entsteht wieder die Invariante, multiplicirt, wenn* $m, n, p, \ldots$ *die Ordnungen der Functionen,* $\mu, \nu, \pi, \ldots$ *die Ordnungen der Invariante in Bezug auf ihre Coefficienten bedeuten, mit*

$$\frac{m\mu + n\nu + p\pi \ldots}{r},$$

was immer eine ganze Zahl ist. Multiplicirt man aber jeden Differentialquotienten nicht mit dem Coefficienten, nach welchem er genommen ist, sondern mit einem anderen derselben Function, in welchem jedesmal der h^{te} *Index um 1 erniedrigt, ein bestimmter anderer aber um 1 erhöht ist, so ist die Summe aller dieser Producte immer identisch Null.*

§. 5.

Symbolische Darstellung der Eliminationsresultante zweier Gleichungen desselben Grades.

Da jede Eliminationsresultante zugleich eine simultane Invariante aller derjenigen Functionen ist, deren gleichzeitiges Verschwinden auf jene Resultirende führt, so muss auch die linke Seite jeder Gleichung, welche aus der Elimination entspringt, als Aggregat symbolischer Determinantenproducte darstellbar sein, und es ist dies eine fundamentale Eigenschaft solcher Gleichungen. Man könnte selbst, da die Form der Eliminationsresultante hiernach bis auf gewisse numerische Coefficienten bekannt ist, das ganze Verfahren jeder Elimination auf die Bestimmung dieser numerischen Werthe reduciren.

Man kann indess auch für die directe Elimination von dem Gebrauch der symbolischen Formen einen nicht unerheblichen Nutzen ziehen. Im Folgenden wird immer vorausgesetzt werden, dass eine Eliminationsresultante bereits in der oben entwickelten symbolischen Form vorliegt; und da der Weg, welcher in den vorhergehenden Paragraphen zu diesem Ende angegeben ist, doch in Wirklichkeit nicht ohne Weitläufigkeit durchzuführen ist, so kann es wünschenswerth scheinen, einen Weg zu finden, der die Eliminationsgleichung unmittelbar in jener symbolischen Form ergiebt. Ich werde zeigen, wie man in dem Fall zweier Gleichungen von gleich hohem Grade einen solchen

Weg einschlagen kann; und derselbe wird zugleich geeignet sein, über die Anwendung der symbolischen Formen überhaupt Licht zu verbreiten.

Ich benutze hierbei die *Bézout*sche Eliminationsmethode in der eleganten Form, welche Herr *Cayley* derselben gegeben hat. Die beiden gegebenen Gleichungen setze ich in die symbolische Form:

$$f(x) = 0 = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = (a'_1 x_1 + a'_2 x_2)^n = \cdots,$$
$$\varphi(x) = 0 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n = (\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2)^n = \cdots,$$

so dass die Producte der lateinischen Buchstaben immer symbolische Ausdrücke für die Coefficienten der einen Gleichung sind, die griechischen Buchstaben für die der anderen. Nach Herrn *Cayley* hat man nun die Function zu bilden:

$$\Omega = \frac{f(x).\varphi(y) - \varphi(x).f(y)}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$
$$= \frac{[(a_1 x_1 + a_2 x_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)]^n - [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2)]^n}{x_1 y_2 - y_1 x_2}.$$

Da hier:

$$\frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2)}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1,$$

so kann man die Division wirklich ausführen, und erhält für Ω den Ausdruck:

$$\Omega = (a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1) \left\{ \begin{array}{l} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-1} \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-2} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-2} (a_1 y_1 + a_2 y_2)\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-3} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{n-3} (a_1 y_1 + a_2 y_2)^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad\qquad\qquad + (a_1 y_1 + a_2 y_2)^{n-1} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{n-1} \end{array} \right\};$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen der x und der y, so dass

$$\Omega = \Sigma\Sigma c_{hk} x_1^h x_2^{n-h-1} y_1^k y_2^{n-k-1},$$

wo die Summen für h und k von 0 bis $n-1$ zu nehmen sind, so ist dann die Eliminationsresultante die aus den c gebildete Determinante:

$$0 = \left| \begin{array}{cccc} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n-1,0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{array} \right|.$$

Man muss aber darauf achten, so lange man sich noch der symbolischen Formen bedient, in jeder Reihe dieser Determinante andere symbolische Buchstaben einzuführen, damit bei der Ausrechnung keine Verwirrung eintrete.

Man kann also etwa in der ersten Horizontalreihe die Buchstaben a, α, c anwenden, in der zweiten dieselben mit einem oberen Index 1 versehen, in der dritten mit einem oberen Index 2, u. s. w. Da aber schliesslich für alle diese Buchstaben dieselben Substitutionen ausgeführt werden sollen, so kann man die Bezeichnungen auch vertauschen, ohne dass das Resultat eine Veränderung erfährt; d. h. man kann die oberen Indices 0, 1, ... $n-1$ bei den a, α, c auf die Horizontalreihen der Determinante in beliebiger Weise vertheilen. Man kann endlich, statt die obige Determinante gleich Null zu setzen, auch die Summe aller dieser verschieden bezeichneten Determinanten verschwinden lassen, da dieselben doch schliesslich alle auf den nämlichen Ausdruck zurückkommen. Und betrachtet man diese Darstellungsweise genauer, so sieht man, dass die Eliminationsgleichung die Form eines Entwicklungscoefficienten annimmt, nämlich gleich wird dem Coefficienten von $u.u'.u''\ldots u^{(n-1)}$ in der Entwicklung der aus den Grössen

$$u c_{hk} + u' c'_{hk} + u'' c''_{hk} + \cdots + u^{(n-1)} c^{(n-1)}_{hk}$$

gebildeten Determinante.

Wenn man den Ausdruck von Ω ins Auge fasst, so bemerkt man, dass jedenfalls sich aus der Eliminationsdeterminante der Factor

$$(a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2)(a'_1\alpha'_2-\alpha'_1 a'_2)(a''_1\alpha''_2-\alpha''_1 a''_2)\ldots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-1)}-\alpha_1^{(n-1)}a_2^{(n-1)})$$

absondert; jede Reihe in jedem Glied des gedachten Entwicklungscoefficienten enthält einen Factor dieses Products als gemeinsamen Theiler. Man wird daher lieber statt des oben eingeschlagenen Weges die Eliminationsresultante zunächst in der Form

$$0 = \Theta.(a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2)(a'_1\alpha'_2-\alpha'_1 a'_2)\ldots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-1)}-\alpha_1^{(n-1)}a_2^{(n-1)})$$

darstellen, wo Θ der Coefficient von $u.u'.u''\ldots u^{(n-1)}$ wird in der Entwicklung einer Determinante, die sich von der früheren dadurch unterscheidet, dass bei der Bildung der c der Factor $a_1\alpha_2-\alpha_1 a_2$ aus Ω ausgeschieden wird. Oder mit anderen Worten, setzen wir

$$\Omega^i = (a^i_1\alpha^i_2-\alpha^i_1 a^i_2)\Sigma\Sigma c^i_{hk} x_1^h x_2^{n-h-1} y_1^k y_2^{n-k-1},$$

so wird Θ in der aus den Grössen

$$u.c_{hk}+u'.c'_{hk}+\cdots+u^{(n-1)}.c^{(n-1)}_{hk}$$

gebildeten Determinante der Coefficient von $u.u'\ldots u^{(n-1)}$.

Die Grössen c (abgesehen von dem oberen Index) nehmen unter dieser Voraussetzung folgende Ausdrücke an:

$$c_{hk} = r_{h,0}r_{k,n-1}+r_{h,1}r_{k,n-2}+r_{h,2}r_{k,n-3}+\cdots+r_{h,n-1}r_{k,0},$$

wo die Grössen r sich dadurch bestimmen, dass

$$\sum_{h=0}^{h=n-1} r_{h,m}\, z_1^h z_2^{n-h-1} = (a_1 z_1 + a_2 z_2)^{n-m-1} (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)^m,$$

für alle beliebigen Werthe der z. Diese Form der Grössen c erlaubt es, auf die Determinante, deren Entwicklungscoefficient Θ ist, einen bekannten Satz anzuwenden, nach welchem unter gewissen Umständen eine Determinante in die Summe von Producten je zweier Determinanten zerfällt. Denn da

$$\begin{aligned} u c_{hk} + u' c'_{hk} + \cdots + u^{(n-1)} c^{(n-1)}_{hk} = \; & u\,(r_{h,0}\; r_{k,n-1} + r_{h,1}\; r_{k,n-2} + \cdots + r_{h,n-1} r_{k,0}\;) \\ + \; & u'\,(r'_{h,0}\; r'_{k,n-1} + r'_{h,1}\; r'_{k,n-2} + \cdots + r'_{h,n-1} r'_{k,0}\;) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \; & u^{(n-1)} (r^{(n-1)}_{h,0} r^{(n-1)}_{k,n-1} + r^{(n-1)}_{h,1} r^{(n-1)}_{k,n-2} + \cdots + r^{(n-1)}_{h,n-1} r^{(n-1)}_{k,0}), \end{aligned}$$

so kann man die Determinante dieser Grössen bilden, indem man aus den beiden unvollständigen Systemen

I.

$$\begin{array}{l} u.r_{0,0}\;,\; u.r_{0,1} \;\ldots u.r_{0,n-1}\;;\; u'.r'_{0,0}\;,\; u'.r'_{0,1} \;\ldots u'.r'_{0,n-1}\;;\; \ldots\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,0},\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,1} \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{0,n-1} \\ u.r_{1,0}\;,\; u.r_{1,1} \;\ldots u.r_{1,n-1}\;;\; u'.r'_{1,0}\;,\; u'.r'_{1,1} \;\ldots u'.r'_{1,n-1}\;;\; \ldots\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,0},\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,1} \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u.r_{n-1,0},\; u.r_{n-1,1} \ldots u.r_{n-1,n-1}\;;\; u'.r'_{n-1,0},\; u'.r'_{n-1,1} \ldots u'.r'_{n-1,n-1}\;;\; \ldots\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,0},\; u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,1} \ldots u^{(n-1)}.r^{(n-1)}_{n-1,n-1} \end{array}$$

und

II.

$$\begin{array}{l} r_{0,n-1}\;,\; r_{0,n-2} \;\ldots r_{0,0}\;;\; r'_{0,n-1}\;,\; r'_{0,n-2} \;\ldots r'_{0,0}\;;\; \ldots\; r^{(n-1)}_{0,n-1}\;,\; r^{(n-1)}_{0,n-2} \;\ldots r^{(n-1)}_{0,0} \\ r_{1,n-1}\;,\; r_{1,n-2} \;\ldots r_{1,0}\;;\; r'_{1,n-1}\;,\; r'_{1,n-2} \;\ldots r'_{1,0}\;;\; \ldots\; r^{(n-1)}_{1,n-1}\;,\; r^{(n-1)}_{1,n-2} \;\ldots r^{(n-1)}_{1,0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-1,n-1},\; r_{n-1,n-2} \ldots r_{n-1,0};\; r'_{n-1,n-1},\; r'_{n-1,n-2} \ldots r'_{n-1,0};\; \ldots\; r^{(n-1)}_{n-1,n-1},\; r^{(n-1)}_{n-1,n-2} \ldots r^{(n-1)}_{n-1,0} \end{array}$$

auf alle möglichen Arten die nämlichen n Verticalreihen zu Determinanten zusammensetzt, und die Summe der Producte von je zwei solchen zusammengehörigen Determinantensystemen bildet. Und man erhält sogleich den gesuchten Entwicklungscoefficienten, wenn man statt I. mit II. das System

III.

$$\begin{array}{l} r_{0,0}\;,\; r_{0,1} \;\ldots r_{0,n-1}\;;\; r'_{0,0}\;,\; r'_{0,1} \;\ldots r'_{0,n-1}\;;\; \ldots\; r^{(n-1)}_{0,0},\; r^{(n-1)}_{0,1} \ldots r^{(n-1)}_{0,n-1} \\ r_{1,0}\;,\; r_{1,1} \;\ldots r_{1,n-1}\;;\; r'_{1,0}\;,\; r'_{1,1} \;\ldots r'_{1,n-1}\;;\; \ldots\; r^{(n-1)}_{1,0},\; r^{(n-1)}_{1,1} \ldots r^{(n-1)}_{1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-1,0},\; r_{n-1,1} \ldots r_{n-1,n-1};\; r'_{n-1,0},\; r'_{n-1,1} \ldots r'_{n-1,n-1};\; \ldots\; r^{(n-1)}_{n-1,0},\; r^{(n-1)}_{n-1,1} \ldots r^{(n-1)}_{n-1,n-1} \end{array}$$

verbindet, welches gewissermassen das inverse von II. ist, zugleich aber die Bedingung hinzufügt, dass nur aus solchen Verticalreihen Determinanten gebildet werden sollen, deren obere Indices sämmtlich verschieden sind, und also die Reihe 0, 1, 2, ... $n-1$ in beliebiger Folge darstellen. Und so wird schliesslich

$$\Theta = \Sigma \begin{vmatrix} r_{0,i} & r'_{0,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{0,i^{(n-1)}} \\ r_{1,i} & r'_{1,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{1,i^{(n-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,i} & r'_{n-1,i'} & \dots & r^{(n-1)}_{n-1,i^{(n-1)}} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} r_{0,n-i-1} & r'_{0,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{0,n-i^{(n-1)}-1} \\ r_{1,n-i-1} & r'_{1,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{1,n-i^{(n-1)}-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,n-i-1} & r'_{n-1,n-i'-1} & \dots & r^{(n-1)}_{n-1,n-i^{(n-1)}-1} \end{vmatrix},$$

wo die Summe so zu verstehen ist, dass in derselben i, i', ... $i^{(n-1)}$ alle Werthe 0, 1, ... $n-1$ sollen annehmen können, die Gleichheit mehrerer oder selbst aller Werthe nicht ausgeschlossen.

Die Determinanten, in welche Θ hier zerfällt, lassen sich wiederum als Entwicklungscoefficienten darstellen. Nach der Definition der r sind diese die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der z in dem Product

$$y^{n-m-1} . \eta^m,$$

wenn

$$y = a_1 z_1 + a_2 z_2, \quad \eta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$$

gesetzt wird. Dehnt man also die zweite Summe über $m = 0, 1, \dots n-1$ aus, so ist

$$\Sigma\Sigma \frac{n.n-1\dots n-m+1}{1.2\dots m} r_{hm} z_1^h z_2^{n-h-1} . t^{n-m-1} \tau^m$$

$$= \Sigma \frac{n.n-1\dots n-m-1}{1.2\dots m} y^{n-m-1} \eta^m . t^{n-m-1} \tau^m$$

$$= (yt+\eta\tau)^n = [(a_1 z_1 + a_2 z_2)t + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\tau]^n$$

oder wenn man zuerst nach den z entwickelt, ist

$$\frac{n.n-1\dots n-m+1}{1.2\dots m} . r_{hm}$$

der Coefficient von $t^{n-m-1} . \tau^m$ in der Entwicklung von

$$(a_1 t + \alpha_1 \tau)^h . (a_2 t + \alpha_2 \tau)^{n-h-1}.$$

Ebenso kann man die r' als die Coefficienten der Potenzen der z' in dem Product

$$(y')^{n-m-1} . (\eta')^m$$

ansehen, wo

$$y' = a'_1 z'_1 + a'_2 z'_2, \quad \eta' = \alpha'_1 z'_1 + \alpha'_2 z'_2$$

gesetzt ist, oder

$$\frac{n.n-1\ldots n-m+1}{1.2\ldots m}r'_{hm}$$

als den Coefficienten von $(t')^{n-m-1}.(\tau')^m$ in der Entwicklung von

$$(a'_1t'+\alpha'_1\tau')^h.(a'_2t'+\alpha'_2\tau')^{n-h-1}$$

u. s. w. Endlich also ist offenbar die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{0,i} & r'_{0,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{0,i^{(n-1)}} \\ r_{1,i} & r'_{1,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{1,i^{(n-1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1,i} & r'_{n-1,i'} & \ldots & r^{(n-1)}_{n-1,i^{(n-1)}} \end{vmatrix}$$

der Coefficient von

$$t^{n-i-1}.\tau^i.(t')^{n-i'-1}.(\tau')^{i'}\ldots(t^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1}.(\tau^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}$$

in der Entwicklung von

$$V=\begin{vmatrix} v_2^{n-1} & (v'_2)^{n-1} & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-1} \\ v_2^{n-2}v_1 & (v'_2)^{n-2}v'_1 & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-2}v_1^{(n-1)} \\ v_2^{n-3}v_1^2 & (v'_2)^{n-3}(v'_1)^2 & \ldots & (v_2^{(n-1)})^{n-3}(v_1^{(n-1)})^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{n-1} & (v'_1)^{n-1} & \ldots & (v_1^{(n-1)})^{n-1} \end{vmatrix},$$

wo

$$v_1^{(i)} = a_1^{(i)}t^{(i)}+\alpha_1^{(i)}\tau^{(i)},$$
$$v_2^{(i)} = a_2^{(i)}t^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\tau^{(i)}$$

gesetzt ist, den Entwicklungscoefficienten noch multiplicirt mit

$$\frac{i!(n-i)!\,i'!(n-i')!\ldots(i^{(n-1)})!(n-i^{(n-1)})!}{(n!)^n}.$$

Der Ausdruck V ist aber bekanntlich nichts anderes, als das Product

$$(-1)^{\frac{1}{2}n.n-1}.\Pi(v_2^{(i)}v_1^{(k)}-v_2^{(k)}v_1^{(i)}),$$

wenn in demselben i die Werthe 0, 1, ... $n-1$, und k für jeden Werth von i die Werthe 0, 1, ... $i-1$ erhält. Auf diese Weise erscheint V als ein Determinantenproduct; aber in Folge dessen ist auch jeder der Entwicklungscoefficienten von V ein Aggregat von Determinantenproducten, deren einzelne Factoren aus den a und α zusammengesetzt sind. Da also jeder dieser Entwicklungs-

coefficienten die verlangte symbolische Form hat, so hat sie auch Θ und endlich die Eliminationsgleichung selbst. Ich fasse den Gang, der nunmehr zur Bildung der Eliminationsgleichung in ihrer symbolischen Form eingeschlagen werden kann, in einem Theorem zusammen.

Theorem V.

Um die Eliminationsgleichung zweier Gleichungen n^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen zu erhalten, bilde man zunächst das Product

$$\Pi[(a_2^{(i)}t^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\tau^{(i)})(a_1^{(k)}t^{(k)}+\alpha_1^{(k)}\tau^{(k)})-(a_1^{(i)}t^{(i)}+\alpha_1^{(i)}\tau^{(i)})(a_2^{(k)}t^{(k)}+\alpha_2^{(k)}\tau^{(k)})],$$

in welchem i die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$, k aber für jeden bestimmten Werth von i die Werthe 0, 1, ... $i-1$ erhalten soll, und entwickle das Product nach Potenzen der t und τ. Sodann multiplicire man den Coefficienten von

$$t^{n-i-1}.\tau^{i}.(t')^{n-i'-1}.(\tau')^{i'}\dots(t^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1}.(\tau^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}$$

mit dem Coefficienten von

$$t^{i}.\tau^{n-i-1}.(t')^{i'}.(\tau')^{n-i'-1}\dots(t^{(n-1)})^{i^{(n-1)}}.(\tau^{(n-1)})^{n-i^{(n-1)}-1}.$$

setze dem Product den numerischen Factor

$$\frac{i!\,(n-i)!\,i'!\,(n-i')!\dots(i^{(n-1)})!\,(n-i^{(n-1)})!}{(n!)^n}$$

vor, und bilde die Summe aller Ausdrücke, die man auf diese Weise erhält, wenn man den Zahlen i, i', ... $i^{(n-1)}$ alle möglichen Werthe von 0 bis $n-1$ beilegt. Multiplicirt man das Resultat mit

$$(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)(a_1'\alpha_2'-a_2'\alpha_1')\dots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-2)}-a_2^{(n-1)}\alpha_1^{(n-1)}),$$

so ist das Product, gleich Null gesetzt, das Eliminationsresultat in symbolischer Form, d. h. man hat das wirkliche, wenn man statt der Producte

$$a_1^p a_2^q, \quad (a_1')^p (a_2')^q, \quad \text{etc.}$$

die Coefficienten der einen, statt

$$\alpha_1^p \alpha_2^q, \quad (\alpha_1')^p (\alpha_2')^q, \quad \text{etc.}$$

die Coefficienten der anderen gegebenen Gleichung einsetzt.

Da sowohl von den α als von den a immer n verschiedene Arten vorhanden sind, so ist die letzte Eliminationsgleichung wirklich vom n^{ten} Grad in

Bezug auf die Coefficienten beider Gleichungen *), mithin ohne überflüssigen Factor.

§. 6.

Besonderer Fall der Discriminante.

Einige besondere Bemerkungen erfordert noch der Fall, in welchem die Eliminationsresultante in die Discriminante einer gegebenen Gleichung übergeht, d. h. die Bedingung ausdrückt, unter welcher jene Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. Setzen wir für diesen Fall die gegebene Gleichuug in die symbolische Form

$$0 = (a_1x_1 + a_2x_2)^{n+1} = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^{n+1} \text{ etc.},$$

so hat man, um jene Bedingung zu erhalten, die x aus den beiden Gleichungen

$$0 = a_1(a_1x_1 + a_2x_2)^n = \alpha_1(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^n \ldots,$$
$$0 = a_2(a_1x_1 + a_2x_2)^n = \alpha_2(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^n \ldots$$

zu eliminiren.

Man betrachtet dann statt der im vorigen Paragraphen angewandten Function Ω besser die Function

$$2\Omega = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)\frac{(a_1x_1 + a_2x_2)^n(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)^n - (a_1y_1 + a_2y_2)^n(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^n}{x_1y_2 - y_1x_2},$$

welche durch Ausführung der Division, dem Früheren ganz analog, übergeht in:

$$2\Omega = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)^2\left\{\begin{array}{l} (a_1x_1+a_2x_2)^{n-1}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)^{n-1} \\ +(a_1x_1+a_2x_2)^{n-2}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)^{n-2}(a_1y_1+a_2y_2)(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad +(a_1y_1+a_2y_2)^{n-1}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^{n-1} \end{array}\right\}.$$

Man bemerkt, dass diese Form sich von der des vorigen Paragraphen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des ersten Factors $a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1$ hier sein Quadrat getreten ist. Es ist also in dem Theorem des vorigen Paragraphen nur der Schluss zu verändern, wodurch man folgenden Zusatz zu demselben erhält:

---

*) Bei dieser Gelegenheit mag ein Satz erwähnt sein, den man sehr leicht auf einen anderen bekannten Satz zurückführt. *Ist eine Gleichung durch Elimination aus Gleichungen des* m_1^{ten}, m_2^{ten}, ... m_n^{ten} *Grades entstanden, so ist der Grad der symbolischen Coefficienten für jede Gleichung derselbe, nämlich* $m_1 . m_2 \ldots . m_n$. Daraus folgt z. B., *dass, wenn eine der Gleichungen linear ist, die Coefficienten derselben in jeder der symbolischen Determinanten als eine Reihe vorkommen müssen.* Vgl. unten §. 7 folgg.

Theorem VI.

Um die Bedingungsgleichung aufzustellen, welche die Gleichheit zweier Wurzeln einer Gleichung des $(n+1)^{ten}$ Grades ausdrückt, verfahre man zunächst wie im Theorem V.; multiplicire aber schliesslich nicht mit dem Factor

$$(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)(a_1'\alpha_2'-a_2'\alpha_1')\dots(a_1^{(n-1)}\alpha_2^{(n-1)}-a_2^{(n-1)}\alpha_1^{(n-1)})$$

sondern mit dem Quadrat desselben. Das Resultat, gleich Null gesetzt, giebt die gesuchte Bedingung in ihrer symbolischen Form, und die wirkliche Bedingung, wenn man für die Producte

$$(a_1^{(i)})^p(a_2^{(i)})^q,\quad (\alpha_1^{(i)})^p(\alpha_2^{(i)})^q$$

überall die entsprechenden Coefficienten der ursprünglich gegebenen Gleichung einführt.

Diese Gleichung enthält n Arten der a, und ebensoviel der α; sie ist also in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Gleichung von der $2n^{ten}$ Ordnung, und enthält also keinen überflüssigen Factor.

§. 7.

Invarianten von Functionen, zwischen deren Veränderlichen eine lineare Relation besteht.

Die Betrachtung der symbolischen Formen gestattet die Beantwortung der Frage, *wie die Invarianten von Functionen mit r Veränderlichen mit den Grundformen entsprechender Functionen von $r+1$ Veränderlichen zusammenhängen, aus denen erstere abgeleitet sind, indem man eine lineare Function der Veränderlichen gleich Null setzt.* Diese Frage ist für die Geometrie von höchster Bedeutung, insofern es sich um die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve handelt, oder um die Eigenschaften eines ebenen Schnitts einer algebraischen Fläche. Man kann in dieser Beziehung folgende einfache Betrachtungen anstellen.

Es sei, in symbolischer Form,

$$\begin{aligned}\varphi &= (ax+a_1x_1+\dots+a_rx_r)^n\\ &= (bx+b_1x_1+\dots+b_rx_r)^n = \cdots\end{aligned}$$

eine Function von $r+1$ Veränderlichen, welche durch die linearen Substitutionen

$$\begin{aligned}x &= c\,X+c'\,X'+\dots+c^{(r)}X^{(r)},\\ x_1 &= c_1X+c_1'X'+\dots+c_1^{(r)}X^{(r)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r &= c_rX+c_r'X'+\dots+c_r^{(r)}X^{(r)}\end{aligned}$$

in

$$\varphi = (\alpha X + \alpha' X' + \cdots + \alpha^{(r)} X^{(r)})^n$$
$$= (\beta X + \beta' X' + \cdots + \beta^{(r)} X^{(r)})^n = \cdots$$

übergeht, so dass zwischen den symbolischen Coefficienten die Gleichungen

$$\alpha^{(i)} = c^{(i)} a + c_1^{(i)} a_1 + \cdots + c_r^{(i)} a_r,$$
$$\beta^{(i)} = c^{(i)} b + c_1^{(i)} b_1 + \cdots + c_r^{(i)} b_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

stattfinden. Aus den Transformationsformeln folgt aber auch, wenn

$$C = \Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_r^{(r)}$$

gesetzt wird:

$$X = \frac{1}{C}\left(x \frac{\partial C}{\partial c} + x_1 \frac{\partial C}{\partial c_1} + \cdots + x_r \frac{\partial C}{\partial c_r}\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial C}{\partial c} = u, \quad \frac{\partial C}{\partial c_1} = u_1, \quad \ldots$$

und lässt

$$C.X = ux + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r = 0$$

eine zwischen den x stattfindende lineare Beziehung bedeuten, so wird unter dieser Bedingung φ übergehen in

$$(\varphi) = (\alpha' X' + \alpha'' X'' + \cdots + \alpha^{(r)} X^{(r)})^n$$
$$= (\beta' X' + \beta'' X'' + \cdots + \beta^{(r)} X^{(r)})^n = \cdots.$$

Eine Invariante dieser Function hat nach dem Früheren immer die symbolische Form:

$$J = \Sigma \lambda . \Pi(\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)}),$$

wo die λ Zahlenfactoren bedeuten. Will man in derselben statt der symbolischen Coefficienten $\alpha, \beta \ldots$ von (φ), die symbolischen Coefficienten $a, b \ldots$ von φ, in der ursprünglichen Form, einführen, so hat man sich nur der eben angegebenen Substitutionsformeln

$$\alpha^{(i)} = c^{(i)} a + c_1^{(i)} a_1 + \cdots + c_r^{(i)} a_r,$$
$$\beta^{(i)} = c^{(i)} b + c_1^{(i)} b_1 + \cdots + c_r^{(i)} b_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu bedienen. Durch dieselben aber geht eine Determinante wie

$$\Sigma \pm \alpha' \beta'' \ldots \nu^{(r)},$$

welche r^2 Elemente enthält, in eine Summe von Determinantenproducten über; und zwar, wenn man

$$\mathrm{P} = \Sigma \pm z\, a_2 b_3 \dots n_r$$

setzt, wird

$$\begin{aligned}\Sigma \pm \alpha' \beta'' \dots \nu^{(r)} &= \frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial c_1}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial C}{\partial c_r}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_r} \\ &= u\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} + u_1\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1} + \dots + u_r\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_r} \\ &= \Sigma \pm u\, a_1 b_2 \dots n_r.\end{aligned}$$

Die Invariante der Function (φ) drückt sich also durch die Coefficienten der ursprünglich gegebenen Function φ so aus, dass nur an Stelle der symbolischen Determinanten

$$\Sigma \pm \alpha' \beta'' \dots \nu^{(r)},$$

welche sich auf (φ) beziehen, die symbolischen Determinanten

$$\Sigma \pm u\, a_1 b_2 \dots n_r$$

treten, welche auf φ bezüglich sind, in denen die Reihe der Indices um einen vermehrt ist, und in denen als neue Reihe die Reihe der Coefficienten des gegebenen linearen Ausdrucks hinzugefügt ist.

Dieses merkwürdige und einfache Verhalten führt auf das sehr wichtige

Theorem VII.

Wenn man eine Invariante J einer Function (φ) von r Veränderlichen, welche aus einer Function φ von $r+1$ Veränderlichen dadurch entsteht, dass zwischen den Veränderlichen eine lineare Beziehung angenommen wird, durch die Coefficienten von φ ausdrücken will, so bilde man dieselbe zunächst in symbolischer Form für eine beliebige Function von r Veränderlichen, und setze sodann statt jeder ihrer symbolischen Determinanten eine andere, welche in jeder Reihe einen Buchstaben mehr, und als neue Reihe die Coefficienten des gegebenen linearen Ausdrucks enthält. Lässt man in dieser Form dann die symbolischen Producte nicht mehr die Coefficienten von (φ) sondern die Coefficienten von φ bedeuten, so ist das Resultat, eine zugehörige Form von φ, die gesuchte Invariante von (φ), ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Function φ.

§. 8.

Invarianten von Functionen, zwischen deren Veränderlichen mehrere Relationen bestehen.

Das vorstehende Theorem enthält die Lösung oder doch die Reduction einiger wichtigen Probleme. Man kann dasselbe zunächst dadurch verallge-

meinern, dass man es auf den Fall anwendet, wo *mehrere* lineare Bedingungsgleichungen eintreten. In der That kann man (φ) durch eine weitere lineare Bedingungsgleichung in die Form $((\varphi))$ verwandelt denken, welche nur $r-1$ Veränderliche enthält, u. s. w.; und man wird dann von dem Ausdruck einer Invariante einer Function mit möglichst wenig Veränderlichen, ausgedrückt durch die Coefficienten jener Function selbst, zu Ausdrücken derselben Invariante aufsteigen, welche Coefficienten der Functionen mit mehr Veränderlichen enthalten, indem man die Reihen der Indices in jeder symbolischen Determinante immer um 1 vermehrt, und als neue Reihe die Coefficienten eines der gegebenen linearen Ausdrücke hinzufügt. Das letzte Resultat kann man dann in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem VIII.

Wenn man eine Invariante J einer Function (φ) von r Veränderlichen, welche aus einer Function φ von $r+s$ Veränderlichen dadurch entstanden ist, dass zwischen den Veränderlichen s lineare Beziehungen eingetreten sind, durch die Coefficienten von φ ausdrücken soll, so bilde man dieselbe zunächst für eine beliebige Function von r Veränderlichen, bringe sie in die symbolische Form und vermehre jede Reihe jeder symbolischen Determinante um s Glieder, während man als s neue Reihen die Coefficienten der gegebenen linearen Beziehungen hinzufügt. Lässt man dann die symbolischen Producte nicht mehr die Coefficienten von (φ) sondern die Coefficienten von φ bedeuten, so ist das Resultat die gesuchte Invariante, ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Function.

Man kann endlich noch die Bemerkung hinzufügen, welche ohne weiteren Beweis einleuchtet:

Theorem IX.

Die Theoreme VII. *und* VIII. *gelten ganz ebenso, wenn eine simultane Invariante J mehrerer Functionen (φ), (ψ), ... durch die Coefficienten gegebener Functionen φ, ψ, ... ausgedrückt werden soll.*

§. 9.

Elimination aus Gleichungen, deren einige linear sind.

Sind eine Anzahl von Gleichungen gegeben

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \dots,$$

aus welchen die Unbekannten x_1, x_2, ... x_{r+s} eliminirt werden sollen, so

ist offenbar die linke Seite der Eliminationsgleichung eine simultane Invariante von φ, ψ, etc. Sind aber insbesondere s jener Gleichungen linear, die übrigen aber respective vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade, so giebt das Theorem VIII. oder IX. einen vollkommen symmetrischen Weg an, diese Elimination auf die Elimination von r Grössen aus r Gleichungen vom respective m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade zurückzuführen. Denn reduciren sich φ, ψ, etc. mit Hülfe der s linearen Beziehungen auf (φ), (ψ), etc., so hat man nur eine simultane Invariante dieser Functionen durch die Coefficienten von φ, ψ, etc. auszudrücken. Dies geschieht aber nach dem Vorhergehenden mit Hülfe folgender Regel:

Theorem X.

Statt aus $r+s$ Gleichungen, deren s vom ersten Grade, die anderen respective vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade sind, die Unbekannten zu eliminiren, kann man zunächst die Eliminationsgleichung für r Gleichungen vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade mit r Unbekannten in symbolischer Form bilden, sodann die Elemente jeder Reihe in jeder symbolischen Determinante um s vermehren und als s neue Reihen die Coefficienten der linearen Gleichungen hinzufügen. Führt man dann in der so umgestalteten Eliminationsgleichung statt der symbolischen Producte die Coefficienten der gegebenen Gleichungen vom m^{ten}, n^{ten}, etc. Grade mit $r+s$ Veränderlichen ein, so ist das Resultat die gesuchte Eliminationsresultante.

Da die Eliminationsgleichung zwischen *zwei* Gleichungen beliebigen Grades bekannt ist, und die Reduction einer solchen Gleichung auf die symbolische Form aus dem Theorem I. ersichtlich ist, so hat man hiernach eine ganz allgemeine und symmetrische Methode, aus beliebig vielen Gleichungen die Unbekannten zu eliminiren, wenn nur bei zweien derselben der Grad den zweiten übersteigt. Ist insbesondere der Grad dieser beiden derselbe, so erhält man die symbolische Form, deren Determinanten nur zu erweitern sind, sogleich aus dem Theorem V.

Das Verfahren wird indess wesentlich vereinfacht, sobald die Eliminationsresultante zwischen zwei Gleichungen, auf welche hier Alles zurückkommt, bereits durch andere möglichst einfache Invarianten ausgedrückt vorliegt; indem man dann die symbolische Darstellung und Erweiterung nicht an der ganzen Eliminationsresultante sondern an den einzelnen Invarianten vorzunehmen hat, aus welchen sie zusammengesetzt ist.

Als Beispiel hierfür, und für die ganze Verfahrungsweise überhaupt, wähle ich die Elimination aus drei Gleichungen, deren eine vom ersten Grade

ist, während die anderen vom zweiten Grade sein mögen. Nach dem Obigen hat man zu diesem Ende zunächst die Eliminationsgleichung für zwei Gleichungen vom zweiten Grade zu bilden. Seien diese:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 = 0,$$
$$b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2 = 0.$$

Das Resultat der Elimination aus diesen Gleichungen erhält man in passender Form auf folgende Weise. Wenn die beiden obigen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so kann man sie durch lineare Transformation immer auf die Form bringen:

$$X(aX+bY)=0 \quad \text{und} \quad X(cX+dY)=0.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit beliebigen Factoren α und β, so ist die Determinante der Summe:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha a+2\beta c & \alpha b+\beta d \\ \alpha b+\beta d & 0 \end{vmatrix},$$

d. h. ein vollständiges Quadrat in Bezug auf die Grössen α und β. Dieselbe Eigenschaft muss auch den Gleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt zukommen, d. h. die Determinante der Function

$$\alpha(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2)+\beta(b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2),$$

welche gleich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha a_{11}+\beta b_{11} & \alpha a_{12}+\beta b_{12} \\ \alpha a_{12}+\beta b_{12} & \alpha a_{22}+\beta b_{22} \end{vmatrix}$$

ist, muss in Bezug auf die α, β ein vollständiges Quadrat sein. Setzt man daher $\varDelta$ in die Form

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}(A\alpha^2+B\beta^2+2C\alpha\beta),$$

so muss die Gleichung

$$AB-C^2 = 0$$

stattfinden, welches daher die gesuchte Eliminationsgleichung ist. Aber es sind

$$A = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$B = 2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}$$

die drei einfachsten simultanen Invarianten der beiden quadratischen Formen.

Dieselben nehmen die symbolische Gestalt an:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2$$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2,$$

wenn man die symbolischen Substitutionen anwendet:

$$a_i a_k = \alpha_i \alpha_k = a_{ik},$$
$$b_i b_k = \beta_i \beta_k = b_{ik}.$$

Erweitert man nun diese Invarianten nach der Regel des Theorems X., so erhält man:

$$A = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2, \quad B = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2,$$

$$C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2;$$

und somit ist die Gleichung:

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 \cdot = \left\{ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \end{vmatrix}^2 \right\}^2$$

in symbolischer Form das Resultat der Elimination der x aus den drei Gleichungen:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$
$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{31}x_3x_1 + 2b_{12}x_1x_2 = 0,$$
$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Denkt man sich durch die ersten beiden Gleichungen zwei Kegelschnitte dargestellt, so ist die letzte die Gleichung einer Linie, welche durch einen Schnittpunkt beider hindurchgeht; und die Gleichung (1.) ist demnach *die Gleichung ihrer vier Schnittpunkte in Liniencoordinaten*, woraus die Auflösbarkeit jener Gleichung in vier Factoren beiläufig folgt. Aber es ist ausserdem

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des ersten Kegelschnitts in Liniencoordinaten, und

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 = -2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & u_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & u_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die des zweiten. Verschwindet in (1.) einer dieser Ausdrücke, was für die acht Tangenten geschieht, welche sich in den vier Schnittpunkten an die beiden Kegelschnitte ziehen lassen, so verschwindet auch jedesmal der Ausdruck

$$C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2;$$

und es ist also

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ = u_1^2(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22}-2a_{23}b_{23}) &+ 2u_2u_3(a_{13}b_{12}+a_{12}b_{13}-a_{11}b_{23}-a_{23}b_{11}) \\ +u_2^2(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33}-2a_{31}b_{31}) &+ 2u_3u_1(a_{21}b_{23}+a_{23}b_{21}-a_{22}b_{31}-a_{31}b_{22}) \\ +u_3^2(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-2a_{12}b_{12}) &+ 2u_1u_2(a_{32}b_{31}+a_{31}b_{32}-a_{33}b_{12}-a_{12}b_{33}) \end{aligned}$$

die Gleichung desjenigen Kegelschnitts, welcher von den acht, in den vier Schnittpunkten beider Kegelschnitte gezogenen Tangenten berührt wird.

Diese Bemerkungen wollte ich zur Erläuterung des Vorangegangenen hier beifügen.

§. 10.

Satz über ein System von Gleichungen zweiter Ordnung.

Ich kann nicht umhin bei dieser Gelegenheit eines allgemeinen Satzes zu gedenken, welcher aus der Verallgemeinerung der Methode fliesst, durch welche im vorigen Paragraphen die Eliminationsgleichung für zwei Gleichungen des zweiten Grades gewonnen wurde. Obgleich derselbe streng genommen nicht hierher gehört, so scheint er doch von hinreichendem Interesse, um seine Einschaltung hier zu rechtfertigen.

Es seien r homogene Gleichungen zweiter Ordnung mit r Veränderlichen gegeben:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(1)} x_i x_k, \\ 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(2)} x_i x_k, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \Sigma\Sigma a_{ik}^{(r)} x_i x_k. \end{cases}$$

Sobald diese Gleichungen neben einander bestehen, so muss eine Gleichung

$$R = 0$$

zwischen den Coefficienten bestehen, welche in Bezug auf jede Reihe der a vom Grade 2^{r-1} ist.

Multipliciren wir jetzt die Gleichungen mit beliebigen Factoren $y', y'' \dots y^{(r)}$, und setzen

$$a'_{ik} y' + a''_{ik} y'' + \dots + a^{(r)}_{ik} y^{(r)} = b_{ik},$$

und bilden sodann die Determinante

$$B = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \dots b_{rr}.$$

Dieselbe ist von der r^{ten} Ordnung in Bezug auf die y, von derselben Ordnung für die a, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der y in der Entwicklung von B sind die einfachsten simultanen Invarianten der gegebenen Functionen. Aber wenn die Gleichungen (1.) für irgend ein Werthsystem zusammen bestehen können, so kann man dieselben auf unendlich viele Weisen durch lineare Substitutionen so transformiren, dass, wenn $X_1, X_2, \dots X_r$ die neuen Veränderlichen sind, in allen gleichzeitig das Glied, welches X_r^2 enthält, verschwindet, wo dann

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_{r-1} = 0$$

das System gemeinschaftlicher Lösungen angiebt. Bildet man die Determinante B in dieser Form, und bezeichnet ihre Elemente durch B_{ik}, sie selbst durch B, so ist

$$\mathrm{B} = \Sigma \pm B_{11} B_{22} \dots B_{rr},$$

und $B_{rr} = 0$. Es ist also dann B eine homogene Function zweiter Ordnung von

$$B_{1r}, \quad B_{2r}, \quad \dots \quad B_{r-1,r},$$

und es können daher offenbar die Gleichungen

$$(2.) \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y''} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y^{(r)}} = 0$$

neben einander bestehen, da ihre rechten Theile lineare Functionen von

$$B_{1r}, \quad B_{2r}, \quad \dots \quad B_{r-1,r}$$

sind, und also die obigen r Gleichungen durch die $r-1$ Gleichungen

$$B_{1r} = 0, \quad B_{2r} = 0, \quad \dots \quad B_{r-1,r} = 0$$

erfüllt werden.

Aber die Gleichungen (2.) führen als lineare Combinationen die Gleichungen mit sich:

$$(3.) \quad \frac{\partial B}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y''} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(r)}} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die y, so erhält man eine Gleichung

$$P = 0,$$

wo P eine Function der $r(r-1)^{r-1\text{ten}}$ Ordnung der Coefficienten von B ist, d. h. der einfachen simultanen Invarianten der gegebenen Functionen (1.), und somit eine homogene Function der $r^2(r-1)^{r-1\text{ten}}$ Ordnung von den Coefficienten jener Functionen. Da nun die Function R im Allgemeinen nicht in rationale Factoren zerlegbar ist, so muss P die Function R als Factor enthalten; und man hat somit das folgende

Theorem XI.

Bezeichnet man durch $R = 0$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass r homogene Gleichungen zweiter Ordnung mit r Veränderlichen ein gemeinschaftliches System von Lösungen zulassen; multiplicirt man ferner die linken Theile der r Gleichungen zweiter Ordnung mit willkürlichen Factoren, und bildet die Determinante der homogenen Function zweiter Ordnung, welche durch Addition dieser Producte entsteht; so ist die Function P, *welche ausdrückt, dass die Differentialquotienten jener Determinante, nach den willkürlichen Factoren genommen, gleichzeitig verschwinden können, und welche eine rationale Function der einfachsten simultanen Invarianten von den linken Theilen der gegebenen Gleichungen ist, immer durch R ohne Rest theilbar.*

§. 11.

Ueber die Darstellung der Curven n^{ter} Ordnung durch Gleichungen in Liniencoordinaten.

Ein sehr wichtiges Problem, dessen vollständige Lösung in den vorhergehenden Betrachtungen enthalten ist, bietet sich dar in der Aufgabe, eine beliebige Curve in Liniencoordinaten auszudrücken. Ist $f = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, so ist im Allgemeinen die Gleichung, welche die Curve auf die angegebene Weise darstellt, das Resultat der Elimination der x aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = u_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = u_3.$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

wo u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer Tangente bedeuten. Aber wenn man die geometrische Seite des Problems ins Auge fasst, so kann man dasselbe auch so aussprechen:

Die Beziehung soll gefunden werden, welcher die Coefficienten u_1, u_2, u_3 genügen müssen, damit die Function f mit Hülfe der linearen Gleichung

$$(1.)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

in eine Function von zwei Veränderlichen verwandelt werden könne, welche zwei gleiche lineare Factoren enthalte,

entsprechend den beiden Schnittpunkten der Linie (1.) mit der gegebenen Curve, welche im Berührungspunkte zusammenfallen. In dieser Form wird das Problem durch das Theorem VIII. sofort gelöst, und zwar auf eine Weise, welche ich in folgendes Theorem zusammenfasse:

Theorem XII.

Um die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten darzustellen, bilde man zuerst die Bedingung dafür, dass eine Gleichung n^{ten} Grades zwei gleiche Wurzeln habe, und gebe ihr die symbolische Form

$$0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma\pm a_1b_2),$$

wo die λ Zahlenfactoren, und die Producte $a_1^i a_2^k$, $b_1^i b_2^k$ symbolische Darstellungen der Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades sind. Dann ist

$$0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma\pm u_1a_2b_3)$$

die symbolische Form der gesuchten Gleichung, in welcher die Producte

$$a_1^i a_2^k a_3^h,\quad b_1^i b_2^k b_3^h$$

nur durch die Coefficienten der Curvengleichung zu ersetzen sind, um die wirkliche Gleichung in Liniencoordinaten zu geben.

Da hier nur vollständig bekannte Operationen, welche durch das Theorem VI. sogar wirklich ausgeführt sind, erfordert werden, so kann man das Problem der Aufstellung einer algebraischen Curve in Liniencoordinaten hierdurch als vollständig erledigt ansehen.

Da die Bedingungsgleichung, welche angiebt, dass eine Gleichung n^{ten} Ordnung zwei gleiche Wurzeln habe, vom $2(n-1)^{ten}$ Grade in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung ist, und sich bei der Erweiterung der symbolischen Determinante offenbar der Grad der Gleichung in Bezug auf die symbolischen Factoren nicht ändert, so ist auch das Resultat von gleichem Grade in Bezug auf die Coefficienten der Curvengleichung, und man hat also noch das

Theorem XIII.

Die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten, welche im Allgemeinen von der $n(n-1)^{ten}$ Ordnung für die Veränderlichen ist,

wird im Allgemeinen von der $2(n-1)^{ten}$ Ordnung für die Coefficienten der ursprünglichen Curvengleichung.

Ich werde zunächst mit Hülfe des Theorems XII. die bekannten Gleichungen der Curven zweiter und dritter Ordnung in Liniencoordinaten entwickeln, um sodann zu den merkwürdigen Formen überzugehen, auf welche diese Theorie für die Curven der vierten Ordnung leitet.

§. 12.

Curven zweiter und dritter Ordnung in Liniencoordinaten dargestellt.

Die Bedingung dafür, dass eine quadratische Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln habe, ist

$$2\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^2 \quad = b_1^2, \\ b &= a_1 a_2 = b_1 b_2, \\ c &= a_2^2 \quad = b_2^2 \end{aligned}$$

einführt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Die symbolische Form der Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in Liniencoordinaten ist demnach:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2,$$

oder, wenn man die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten durch

$$0 = a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2$$

darstellt, und die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}$$

ausführt:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

was die bekannte Form ist.

Die Bedingung, unter welcher die cubische Gleichung

$$ax^3+3bx^2+3cx+d = 0$$

zwei gleiche Wurzeln enthält, ist, wie man unter Anderem aus §. 9 ohne Weiteres entnehmen kann:

$$0 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Führt man hier die symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^3 \quad = b_1^3 \quad = c_1^3 \quad = d_1^3, \\ b &= a_1^2 a_2 = b_1^2 b_2 = c_1^2 c_2 = d_1^2 d_2, \\ c &= a_1 a_2^2 = b_1 b_2^2 = c_1 c_2^2 = d_1 d_2^2, \\ d &= a_2^3 \quad = b_2^3 \quad = c_2^3 \quad = d_2^3 \end{aligned}$$

aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1 a_2^2 \\ b_1^2 b_2 & b_2^3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1^3 & c_1 c_2^2 \\ d_1^2 d_2 & d_2^3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 a_2 \\ b_1^2 b_2 & b_1 b_2^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1^2 c_2 & c_1 c_2^2 \\ d_1 d_2^2 & d_2^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}\{a_1 b_2 (a_1 b_2 + b_1 a_2) . c_1 d_2 (c_1 d_2 + d_1 c_2) - 4 a_1^2 b_1 b_2 c_1 c_2 d_2^2\}. \end{aligned}$$

Der wirkliche Werth dieses Ausdrucks muss offenbar ungeändert bleiben, wie man auch die symbolischen Coefficientenreihen mit einander vertausche. Vertauscht man also zunächst die a mit den b, sodann die c mit den d, endlich beides zugleich, so erhält man drei neue Formen, welche mit der vorigen wesentlich identisch sein müssen: und indem man alle vier Formen addirt, erhält man die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \{(a_1 b_2 + b_1 a_2)(c_1 d_2 + d_1 c_2) - 4 a_1 b_1 c_2 d_2\}.$$

Vertauscht man nun noch gleichzeitig die a mit den c, und die b mit den d, so entsteht abermals eine neue Form dieser Gleichung; und wenn man diese zu der obigen addirt, und den gemeinschaftlichen Factor 2 übergeht, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \{(a_1 b_2 + b_1 a_2)(c_1 d_2 + d_1 c_2) - 2 a_1 b_1 c_2 d_2 - 2 a_2 b_2 c_1 d_1\} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist bereits die verlangte symbolische Form. Sie vereinfacht sich noch durch die Bemerkung, dass der zweite Theil der Klammer aus dem ersten

durch Vertauschung der c mit den d hervorgeht, wodurch die anderen Factoren sich gar nicht ändern. Die Form löst sich daher in die Summe zweier Glieder auf, welche beide denselben wirklichen Werth haben; indem man also nur das eine Glied der Summe beibehält, bleibt:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Die symbolische Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten ist also:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

und die wirkliche Form geht hieraus hervor durch die symbolischen Substitutionen:

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = c_i c_k c_h = d_i d_k d_h = a_{ikh},$$

wenn

$$\Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h = 0$$

die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten ist.

Ich werde zeigen, dass diese Form in der That mit dem Ausdruck der Gleichung übereinkommt, welchen Herr *Aronhold* gegeben hat. Zu diesem Ende hat man nur die Zwischenform Θ zu betrachten, der Herr *Aronhold* die Form giebt (dieses Journal Bd. 55, p. 118):

$$\Theta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 . (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}^2 . (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3).$$

Ordnet man Θ nach den Potenzen der x, so dass

$$\Theta = \Sigma\Sigma\Theta_{ik} x_i x_k,$$

und führt für Θ_{ik} die symbolischen Substitutionen ein:

$$\Theta_{ik} = \lambda_i \lambda_k = \mu_i \mu_k,$$

so wird durch Vergleichung mit den obigen Ausdrücken:

$$\lambda_i\lambda_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 . a_i b_k,$$

$$\mu_i\mu_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} . c_i d_k.$$

Zwar müsste man eigentlich statt $a_i b_k$ und $c_i d_k$ hier setzen $\frac{1}{2}(a_i b_k + b_i a_k)$ und $\frac{1}{2}(c_i d_k + d_i c_k)$. Aber dann würde sich jeder der obigen Ausdrücke nur in zwei Glieder auflösen, welche denselben wirklichen Werth haben, und deren eines also für beide gesetzt werden kann, indem man den Nenner 2 zugleich auslässt.

Durch diese Formeln aber geht die gegebene symbolische Gleichung über in:

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}^2,$$

oder, nach der Herrn *Aronhold* eigenthümlichen Bezeichnungsweise, indem man von den symbolischen Substitutionen zu den wirklichen Werthen zurückkehrt:

$$0 = \Sigma\Sigma u_i u_k (\Theta, \Theta)^{ik}.$$

Dies ist der Ausdruck, welchen Herr *Aronhold* für die zugehörige Form *F* angegeben hat (dieses Journal Bd. 55, p. 185).

Nachdem ich an diesen Beispielen die Uebereinstimmung der angegebenen Methode mit früheren dargelegt habe, gehe ich dazu über, die neuen Resultate zu entwickeln, auf welche dieselbe führt in der Theorie der Curven vierter Ordnung.

§. 13.

Curven vierter Ordnung in Liniencoordinaten dargestellt.

Die Bedingungsgleichung, unter welcher die biquadratische Gleichung

$$(1.) \quad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat, ist bekanntlich von Herrn *Cayley* auf die folgende Form (s. die Abhandlung des Herrn *Hermite* Bd. 52, p. 1 etc. dieses Journals) zurückgeführt worden:

$$i^3 - 27j^2 = 0,$$

wo i und j die Fundamentalinvarianten der biquadratischen Form sind, und die Bedeutung haben:

$$i = ae - 4bd + 3c^2, \quad j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Man hat zunächst die symbolischen Ausdrücke dieser beiden Invarianten aufzusuchen. Mit Hülfe der symbolischen Substitutionen

$$\begin{aligned} a &= a_1^4 = b_1^4 = c_1^4, \\ b &= a_1^3 a_2 = b_1^3 b_2 = c_1^3 c_2, \\ c &= a_1^2 a_2^2 = b_1^2 b_2^2 = c_1^2 c_2^2, \\ d &= a_1 a_2^3 = b_1 b_2^3 = c_1 c_2^3, \\ e &= a_2^4 = b_2^4 = c_2^4 \end{aligned}$$

erhält man aber sogleich:

$$\begin{aligned} i &= \tfrac{1}{2}(a_1^4 b_2^4 + a_2^4 b_1^4 - 4a_1^3 a_2 b_1 b_2^3 - 4a_1 a_2^3 b_1^3 b_2 + 6a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2) \\ &= \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4. \end{aligned}$$

Hierdurch ist die symbolische Darstellung von i bereits geleistet. Für j hingegen erhält man:

$$j = a_1^2 . b_1 b_2 . c_2^2 . \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}.$$

Der vor der Determinante stehende Factor ist offenbar ein Glied der Determinante selbst. Vertauscht man nun die a, b, c auf alle mögliche Weisen mit einander, so erhält man immer wieder dieselbe Determinante, der Reihe nach mit ihren sämmtlichen Gliedern multiplicirt. Addirt man also alle die Formen, deren wirklicher Werth stets j ist, und dividirt das Resultat durch 6, so kommt:

$$j = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}^2,$$

oder da die Determinante selbst auch die Form

$$-(a_1 b_2 - b_1 a_2)(b_1 c_2 - c_1 b_2)(c_1 a_2 - a_1 c_2)$$

annimmt:

$$j = \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 .$$

Auf diese Weise hat auch j die geforderte Gestalt angenommen, und auch die ursprünglich gegebene Gleichung

$$i^3-27j^2 = 0$$

ist daher ebenso dargestellt. Setzt man also

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^4,$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2,$$

so ist die Gleichung der Curve vierter Ordnung

$$\Sigma a_{ihkm} x_i x_h x_k x_m = 0$$

in Liniencoordinaten ausgedrückt:

$$P^3-3Q^2 = 0,$$

sobald man in den beiden zugehörigen Formen P und Q die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_h a_k a_m = b_i b_h b_k b_m = c_i c_h c_k c_m = a_{ihkm}$$

ausgeführt denkt.

Die beiden Fundamentalformen P und Q sind respective von der vierten und sechsten Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen u, von der zweiten und dritten in Beziehung auf die Coefficienten der Curvengleichung. Ich werde einige merkwürdige Eigenschaften derselben hier entwickeln, indem ich mir vorbehalte, auf andere bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung (1.) durch α, β, γ, δ, so sind (s. die angeführte Abhandlung des Herrn *Hermite*) die Wurzeln der Gleichung

$$4\Theta^3-i\Theta+j = 0$$

folgende:

$$\Theta_1 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\},$$

$$\Theta_2 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)\},$$

$$\Theta_3 = \frac{a}{12}\{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}.$$

Von diesen Grössen verschwindet *eine*, sobald die vier Punkte einer geraden Linie, deren Abstände von einem festen Punkte α, β, γ, δ bedeuten können, harmonisch sind; und sie verschwinden *sämmtlich*, sobald drei Wurzeln der biquadratischen Gleichung einander gleich werden. Im ersten Falle also muss j verschwinden, im zweiten Falle ausser j noch i.

Ist also $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ eine Gerade, welche die Curve vierter Ordnung in vier harmonischen Punkten schneidet, so muss für die entsprechenden Werthe der u die aus der Erweiterung von j entstandene Form verschwinden. Dies giebt das

Theorem XIV.

Die Linien, welche die Curve vierter Ordnung in vier harmonischen Punkten schneiden, umhüllen eine Curve vierter Klasse

$$Q = 0,$$

deren Coefficienten von der dritten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Curve sind.

Für die Wendetangenten der Curve aber, welche dieselbe in drei zusammenfallenden Punkten schneiden, muss neben $Q = 0$ auch noch die aus $i = 0$ abgeleitete Gleichung

$$P = 0$$

bestehen; und es zeigt sich daher das merkwürdige Resultat, dass, so wie die *Wendepunkte* sich als Schnittpunkte der Curve vierter Ordnung mit einer Curve sechster Ordnung darstellen, *ebenso die Wendetangenten direct als die gemeinschaftlichen Tangenten einer Curve vierter Klasse und einer Curve sechster Klasse gefunden werden können.*

Es ist durch geometrische Betrachtungen bewiesen, dass im Allgemeinen jede Wendetangente einer algebraischen Curve in ihrer Darstellung durch Liniencoordinaten, bei welcher zu der gegebenen Curve nothwendig noch andere Zweige hinzutreten, als Rückkehrtangente auftritt. Aber es ist mir nicht bekannt, dass dieses bisher an einem algebraischen Ausdruck direct nachgewiesen wäre. Es ist daher nicht ohne Wichtigkeit, dass die vorliegende Form der Gleichung einer Curve vierter Ordnung dies ohne Weiteres zeigt. Da für die Wendetangenten P und Q verschwinden, so reduciren sich diese Functionen für Tangenten, welche den Wendetangenten sehr nahe kommen, auf dP und dQ, und die Gleichung der Curve reducirt sich mit Beibehaltung allein der Grössen niedrigster Ordnung auf

$$(dQ)^2 = 0.$$

In dem Punkte, dessen Gleichung

$$(2.)\qquad U_1\frac{\partial Q}{\partial u_1}+U_2\frac{\partial Q}{\partial u_2}+U_3\frac{\partial Q}{\partial u_3}=0,$$

wobei $P=0$ und $Q=0$, berührt also die Wendetangente zwei verschiedene Zweige der Curve

$$P^3-3Q^2 = 0.$$

Dieser Punkt ist also ein Rückkehrpunkt der letzteren Curve und ein Wendepunkt der ursprünglich gegebenen. Man bemerkt endlich, dass (2.) nichts anderes ist als die Gleichung des Punktes von $Q=0$, in welchem diese Curve von der Wendetangente berührt wird; die Wendepunkte gehören also sämmtlich der Curve $Q=0$ an. Ich fasse diese Bemerkungen zusammen in folgendes

Theorem XV.

Die Curve vierter Ordnung führt, durch Liniencoordinaten ausgedrückt, auf die Curve zwölfter Klasse

$$P^3-3Q^2 = 0,$$

welche ausser jener noch andere Zweige enthält. Jeder Wendepunkt der ersten Curve wird Rückkehrpunkt der zweiten; die Wendetangenten der ersten sind Rückkehrtangenten der anderen, und zwar sind sie die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven vierter und sechster Klasse

$$P=0,\qquad Q=0,$$

wobei noch insbesondere $Q=0$ von den Wendetangenten in den Wendepunkten selbst berührt wird.

Ich bemerke, dass durch diese Betrachtungen eine Frage gelöst wird, welche in der gewöhnlichen Fassung auf Schwierigkeiten führt, nämlich die Frage *nach dem Product der Gleichungen sämmtlicher Wendetangenten,* welches ein rationaler Ausdruck der Coefficienten der Curve, und für die x von der 24sten Ordnung sein muss. Die directe Methode zur Aufstellung dieses Products führt auf die Elimination aus drei Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade. Ist X ein Wendepunkt, $f(X)=0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, so ist die Bedingung dafür, dass x auf der Wendetangente von x liege, ausgedrückt durch die Bedingung, dass in der Entwicklung von

$$f(X+\lambda x)$$

nach Potenzen von λ die drei ersten Glieder verschwinden. Man hat also dann aus den drei Gleichungen

$$f(X)=0,\qquad Df(X)=0,\qquad D^2f(X)=0,$$

welche respective vom vierten, dritten und zweiten Grade sind, die Unbekannten X zu eliminiren. Aber statt dessen kann man dem Obigen zufolge die u aus den Gleichungen

$$P=0,\qquad Q=0,$$
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

eliminiren, welche ausdrücken, dass x auf einer Wendetangente liege, und welche für die u respective vom vierten, sechsten und ersten Grade sind. Da diese Aufgabe nach dem Vorigen auf die Elimination aus zwei Gleichungen vom vierten und sechsten Grade zurückkommt, so ist die vorliegende Frage prinzipiell erledigt. Und man ist ausserdem, was wichtig ist, in der gegenwärtigen Form sicher, die schliessliche Gleichung ohne einen die x enthaltenden überflüssigen Factor zu erhalten, da die Endgleichung offenbar für die x vom 24sten Grade wird, während dies in der ersten Fassung keineswegs ersichtlich ist. Ich füge daher dem Obigen noch das Theorem hinzu:

Theorem XVI.

Um das Product der Gleichungen aller Wendetangenten der Curven vierter Ordnung zu erhalten, hat man nur die u aus den Gleichungen

$$P=0,\qquad Q=0,$$
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

zu eliminiren, eine Aufgabe, welche durch die Theoreme I. *und* VII. *erledigt wird, und welche die Endgleichung ohne einen, die x enthaltenden überflüssigen Factor giebt.*

§. 14.

Das Problem der Doppeltangenten. Fall der Curven vierter Ordnung.

Auch für die Untersuchung der Doppeltangenten bietet die vorliegende Methode eigenthümliche Gesichtspunkte dar. Sei im Allgemeinen $R=0$ die Gleichung, welche ausdrückt, dass eine Gleichung n^{ten} Grades zwei gleiche Wurzeln hat, und sei in symbolischer Form

$$R = \Sigma\lambda\,.\,\Pi\Sigma\pm a_1 b_2\,.$$

Wenn sodann die gegebene Gleichung *zwei Paare* gleicher Wurzeln enthalten soll, so muss nicht nur R verschwinden, sondern auch die Differentialquotienten von R, genommen nach den Coefficienten der gegebenen Gleichung, müssen sämmtlich verschwinden. Ich will der Vollständigkeit wegen einen Beweis dieses Satzes hierhersetzen.

Die gegebene Gleichung sei

$$(1.)\quad \varphi(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \cdots = 0.$$

und die Wurzeln derselben seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n.$$

Dann ist bekanntlich

$$(2.)\quad R = \mu\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\}^2,$$

wo μ einen constanten Factor bedeutet. Man kann R ebensowohl als Function der $n+1$ Grössen a, b ..., wie als Function der $n+1$ Grössen μ, α_1, α_2 ... ansehen; und indem man beiden Systemen von Argumenten kleine Veränderungen ertheilt, erhält man aus (2.) die Gleichung:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a}\delta a + \dfrac{\partial R}{\partial b}\delta b + \cdots \\ = \delta\mu(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 \\ +2\mu\{(\delta\alpha_1-\delta\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2+\cdots\}. \end{cases}$$

Deutet man nun durch $\triangle\varphi(x)$ an, dass in φ nur die Coefficienten a, b ..., nicht aber das Argument variirt werden solle, so ist

$$\triangle\varphi(\alpha_i) + \varphi'(\alpha_i).\delta\alpha_i = 0,$$

daher

$$\delta\alpha_1 - \delta\alpha_2 = \frac{\triangle\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)} - \frac{\triangle\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}.$$

Und mit Hülfe dieser Ausdrücke kann man der Gleichung (3.) folgende Form geben:

$$\frac{\partial R}{\partial a}\delta a + \frac{\partial R}{\partial b}\delta b + \cdots$$
$$= \delta\mu(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$
$$+2\mu\left\{\left(\frac{\frac{\triangle\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{\frac{\triangle\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}}{\alpha_2-\alpha_1}\right)(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2+\cdots\right\}.$$

Die Nenner $\dfrac{\varphi'(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}$ etc. sind immer ganze Functionen der α, und gehen in den Producten

$$(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2 \text{ etc.}$$

jedesmal vollständig auf. Setzt man also in der vorliegenden Gleichung $\alpha_1=\alpha_2$, so kann nirgend ein Nenner eine Unendlichkeit herbeiführen, ebenso wenig, als wenn ausserdem noch $\alpha_3=\alpha_4$ gesetzt wird. Durch die erste Operation

geht aber die rechte Seite der vorliegenden Gleichung über in:

$$2\mu\left(\frac{\frac{\Delta\varphi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\frac{\Delta\varphi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}}{\alpha_2-\alpha_1}\right)(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\dots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2,$$

oder da nach (1.)

$$\varphi'(\alpha_1) = a.(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_1-\alpha_n),$$
$$\varphi'(\alpha_2) = a.(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_2-\alpha_n)$$

ist, in

$$-2\mu\left\{\begin{array}{l}\Delta\varphi(\alpha_2).(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\dots(\alpha_2-\alpha_3)\ (\alpha_2-\alpha_4)\ \dots(\alpha_3-\alpha_4)^2\dots\\+\Delta\varphi(\alpha_1).(\alpha_1-\alpha_3)\ (\alpha_1-\alpha_4)\ \dots(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2\dots(\alpha_3-\alpha_4)^2\dots\end{array}\right\}.$$

Setzt man noch $\alpha_3=\alpha_4$, so verschwindet dies identisch, und die Gleichung (3.) giebt also, wenn zwei Paare gleicher Wurzeln existiren:

$$(4.)\qquad \frac{\partial R}{\partial a}\delta a+\frac{\partial R}{\partial b}\delta b+\cdots = 0,$$

oder, da die Variationen ganz willkürlich sein konnten,

$$(5.)\qquad \frac{\partial R}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial b}=0,\quad \dots,$$

was zu beweisen war.

Die Gleichung (4.) aber gestattet es, die Bedingung zweier gleichen Wurzelpaare noch auf andere Weise einfach auszusprechen. Da die Variationen δa, δb ... beliebig sind, so kann man sie durch die Coefficienten einer beliebigen anderen Form

$$\alpha x^n+n\beta x^{n-1}+\cdots$$

ersetzen; und ist dann

$$S = \alpha\frac{\partial R}{\partial a}+\beta\frac{\partial R}{\partial b}+\cdots,$$

so ist

$$S = 0,$$

diese Gleichung *unabhängig von den Werthen der* α, β erfüllt gedacht, die Bedingung, unter welcher die gegebene Gleichung zwei gleiche Wurzelpaare zulässt.

Den Ausdruck S aber kann man offenbar dadurch bilden, dass man die symbolische Form für R ebenso oft hinschreibt als dieselbe symbolische Coefficientenreihen enthält, jedesmal für alle Reihen bis auf eine die gegebenen symbolischen Substitutionen ausführt, für eine einzige Reihe aber, und jedesmal für eine andere, eine neue und zwar ganz beliebige bestimmte symbolische Substitution eintreten lässt. Die Summe aller so erhaltenen Ausdrücke ist dann der symbolische Ausdruck für S.

In dem Falle z. B. der Gleichungen vierter Ordnung, wo

$$R = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ b_1'' & b_2'' \end{vmatrix}^4$$

$$-\frac{3}{4}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1' & b_2' \\ c_1' & c_2' \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1' & c_2' \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}^2,$$

(es sind in der Formel i^3-27j^2 des §. 13 nur für die verschiedenen Factoren i, j verschiedene symbolische Substitutionen gebraucht) würde, um S zu bilden, dieser Ausdruck sechsmal hinzuschreiben, und jedesmal eines der Systeme a, b, c durch ein neues, fremdes System s zu ersetzen sein. Aber man bemerkt leicht, dass die wirklichen Werthe der so erhaltenen sechs Formen sich nicht von einander unterscheiden; indem man also nur einer davon den Factor 6 giebt, erhält man S in der Form

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}^4 . \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^4$$

$$-\frac{3}{4}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1' & b_2' \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}^2;$$

oder, wenn man wieder i und j einführt, und ausserdem der Analogie wegen durch i_s und j_s die beiden Formen:

$$i_s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^4$$

$$j_s = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2$$

bezeichnet:

$$\frac{1}{6}S = i^2.i_s - 27j.j_s.$$

Diese Art, die Bedingung für zwei Paar gleicher Wurzeln auszusprechen, ist insofern von Interesse, als sie den unmittelbaren Uebergang zu den Doppeltangenten algebraischer Curven mit Hülfe des Theorems VII. gestattet. Betrachtet man S als simultane Invariante der beiden Formen

$$(5.)\qquad \begin{cases} ax^n + nbx^{n-1} + \cdots, \\ \alpha x^n + n\beta x^{n-1} + \cdots, \end{cases}$$

zu deren zweiter die symbolischen Coefficienten s gehören, während alle anderen sich auf die erste beziehen, so kann man beide Formen und zugleich die Invariante S entstanden denken, indem man zwei Formen mit drei Ver-

änderlichen mit Hülfe einer linearen Gleichung

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

reducirt hat. Um die Invariante S dann durch die Coefficienten der ursprünglichen Formen auszudrücken, hat man nur nach dem genannten Theorem zu verfahren; und der genommene Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt dann die Bedingung dar, unter welcher eine gegebene Curve (die dem ersten der Ausdrücke (5.) entsprechende Form gleich Null gesetzt) von der Geraden

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

in zwei Punkten berührt wird; vorausgesetzt, dass diese Bedingung erfüllt wird für jede beliebige Function, welche der zweiten Form (5.) entsprechend gewählt werden kann. Die resultirende Form aber entsteht dann aus der erweiterten Form von R ebenso, wie S aus R selbst; und dies führt auf folgendes

Theorem XVII.

Wenn man die Gleichung einer Curve durch Liniencoordinaten in symbolischer Form darstellt, diesen Ausdruck ebenso oft aufschreibt, als er symbolische Coefficientenreihen enthält; wenn man jedesmal eine (und jedesmal eine andere) dieser Coefficientenreihen durch eine bestimmte aber ganz beliebige fremde symbolische Substitution, die anderen aber durch die ursprüngliche auf wirkliche Grössen reducirt, so ist die Summe aller erhaltenen Ausdrücke, gleich Null gesetzt, unter der Voraussetzung, dass die fremden Coefficienten ganz beliebige Werthe sollen annehmen können, die Bedingung dafür, dass u_1, u_2, u_3 *die Coordinaten einer Doppeltangente seien.*

Für die Curven vierter Ordnung entsteht auf diese Weise aus der Gleichung

$$P^3-3Q^2 = 0$$

die Gleichung

$$(6.)\qquad P^2P_s-3QQ_s = 0,$$

wo, analog den oben eingeführten Bezeichnungen von i_s und j_s,

$$(7.)\qquad \begin{cases} P_s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}^4, \\ Q_s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 \end{cases}$$

gesetzt ist. Und zwar ist offenbar in (6.) diejenige Lösung auszuschliessen, welche in der gleichzeitigen Erfüllung der Gleichungen

$$P=0, \quad Q=0$$

besteht, da diese Gleichungen, wie oben gezeigt ist, auf die Wendetangenten führen.

Es ist vielleicht bemerkenswerth, dass es genügt, die Gleichung (6.) unter der Form

$$Q_s = \lambda . P_s$$

darzustellen; weil, indem man den s alle möglichen Werthsysteme giebt, von selbst

$$\lambda = \frac{P^2}{3Q} \quad \text{und} \quad P^3 = 3Q^2$$

folgt. Ich werde, statt diesen Satz zu beweisen, zeigen, dass aus den in der Gleichung

$$j_s = \lambda . i_s$$

enthaltenen Bedingungen immer

$$\lambda = \frac{i^2}{27j} \quad \text{und} \quad i^3 = 27j^2$$

folgt. Dies ist einfach zu beweisen, und zieht das vorher Behauptete ohne Weiteres nach sich, immer durch blosse Anwendung des Theorems VII.

Die gegebene Gleichung vierten Grades sei wieder wie in §. 13:

$$\varphi = ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e = 0.$$

Die Gleichung

$$j_s = \lambda . i_s$$

involvirt dann, da

$$i_s = \tfrac{1}{2}\left(s_1^4\frac{\partial i}{\partial a}+4s_1^3 s_2\frac{\partial i}{\partial b}+\cdots\right),$$
$$j_s = \tfrac{1}{3}\left(s_1^4\frac{\partial j}{\partial a}+4s_1^3 s_2\frac{\partial j}{\partial b}+\cdots\right)$$

ist, folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial a} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial a} \quad \text{oder:} \quad \tfrac{1}{3}(ce-d^2) = \frac{\lambda e}{2},$$
$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial b} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial b} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(2eb-2dc) = \frac{4\lambda d}{2},$$
$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial c} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial c} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(ae+2bd-3c^2) = \frac{6\lambda c}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial d} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial d} \quad \text{oder:} \quad \tfrac{1}{3}(2ad-2bc) = \frac{4\lambda b}{2},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial j}{\partial e} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial i}{\partial e} \quad - \quad \tfrac{1}{3}(ac-b^2) = \frac{\lambda a}{2}\,{}^{*}).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c ..., so erhält man

$$\lambda . i = j.$$

Multiplicirt man aber die rechts stehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial j}{\partial e},\quad \tfrac{1}{4}\frac{\partial j}{\partial d},\quad \tfrac{1}{6}\frac{\partial j}{\partial c},\quad \tfrac{1}{4}\frac{\partial j}{\partial b},\quad \frac{\partial j}{\partial a},$$

so kommt:

$$\frac{3\lambda j}{2} = \tfrac{1}{3}\left(2\frac{\partial j}{\partial a}\frac{\partial j}{\partial e} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial j}{\partial d}\frac{\partial j}{\partial b} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial j}{\partial c}\right)^2\right) = \frac{i^2}{18}.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$\lambda = \frac{j}{i} = \frac{i^2}{27j}, \quad \text{und} \quad i^3 = 27j^2,$$

was zu beweisen war.

Man kann sonach für die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung das folgende Theorem aufstellen:

Theorem XVIII.

Wenn man die Grössen u_1, u_2, u_3 so bestimmt, dass der Gleichung

$$Q_s = \lambda P_s \quad \text{(vgl. 7)}$$

für alle Werthe der s Genüge geschieht, so sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer Doppeltangente der Curve vierter Ordnung.

Hieran knüpft sich ein anderes Theorem. Lassen wir an die Stelle der s irgend andere Grössen t treten, so muss für dieselben Doppeltangenten auch

$$Q_t = \lambda P_t$$

sein, wo λ, da es nach dem Vorigen von den Grössen s und t unabhängig

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die beiden folgenden Darstellungen, welche vielleicht nicht bekannt sind, und wo $\varDelta$ die Determinante von φ ist, dividirt durch 36:

$$\varphi = \frac{\partial i}{\partial e}x^4 - \frac{\partial i}{\partial d}x^3 + \frac{\partial i}{\partial c}x^2 - \frac{\partial i}{\partial b}x + \frac{\partial i}{\partial a},$$

$$\varDelta = \frac{\partial j}{\partial e}x^4 - \frac{\partial j}{\partial d}x^3 + \frac{\partial j}{\partial c}x^2 - \frac{\partial j}{\partial b}x + \frac{\partial j}{\partial a},$$

nach welchen die obigen Bedingungsgleichungen einfach dahin ausgesprochen werden können, *dass ihnen zufolge die Determinante von φ sich von φ selbst nur durch einen constanten Factor unterscheide.*

ist, unverändert bleibt. Oder es ist:

$$Q_s.P_t - Q_t.P_s = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Curven zehnter Classe, welche die Grössen s, t als willkürliche Parameter enthalten; und alle Curven des Systems werden offenbar von den Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung berührt, da für diese die Functionen $Q_s - \lambda P_s$, $Q_t - \lambda P_t$ unabhängig von den Werthen der s und t verschwinden. Man hat also den Satz:

Theorem XIX.

Die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung sind zugleich gemeinschaftliche Tangenten sämmtlicher Curven des Systems von Curven zehnter Klasse:

$$Q_s.P_t - Q_t.P_s = 0,$$

in welchen die Grössen t und s willkürliche Parameter bezeichnen.

Es mag noch bemerkt werden, dass dies System offenbar keine anderen, allen Curven gemeinschaftlichen Tangenten zulässt.

§. 15.

Das Problem, eine Curve n^{ter} Ordnung in Liniencoordinaten darzustellen, wird auf eine grössere Anzahl von Variablen ausgedehnt.

Das in §. 11 behandelte Problem ist nur ein specieller Fall eines Problems, welches durch die gegenwärtige Betrachtungsweise zwar nicht, wie jenes, vollständig erledigt wird, welches aber dennoch durch dieselbe eine wesentliche Reduction erfährt, und dadurch in eine Form gebracht wird, welche vollständige Gradbestimmungen ermöglicht.

Es sei f eine homogene Function von r Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$; und die Aufgabe bestehe darin, aus den Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = u_1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = u_2, \quad \dots \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_r} = u_r, \\ u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_r x_r = 0 \end{cases}$$

die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$ zu eliminiren. Die Gleichungen (1.) kann man aber ersetzen durch die Gleichung $u = 0$ zusammen mit der symbolischen Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_r}\delta x_r = u_1 \delta x_1 + u_2 \delta x_2 + \dots + u_r \delta x_r,$$

oder kürzer:

$$\delta(f - u) = 0.$$

Führt man nun in f statt der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$ neue Veränderliche $u, X_1, X_2, \dots X_{r-1}$ ein, welche mit jenen auf lineare Weise zusammenhängen, so nimmt diese symbolische Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f}{\partial X_1}\delta X_1+\frac{\partial f}{\partial X_2}\delta X_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_{r-1}}\delta X_{r-1}-\delta u = 0,$$

und hieraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial X_2}=0,\quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial X_{r-1}}=0.$$

Von diesen aber kann man die erste fortlassen, da die linken Theile der anderen mit Hülfe der Gleichung $u=0$ in homogene Functionen der Veränderlichen $X_1, X_2, \dots X_{r-1}$ übergehen, und also zur Elimination dieser $r-1$ Veränderlichen vollkommen ausreichend sind. Auf diese Weise kommt dann die Aufgabe, aus den Gleichungen (1.) die Grössen x zu eliminiren, auf die andere zurück, aus den Gleichungen

$$(2.)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2}=0,\quad \dots \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-1}}=0$$

die X zu eliminiren, wo f_0 eine Function bedeutet, welche aus f durch Anwendung der linearen Gleichung $u=0$ abgeleitet wird. Ob man die Gleichung $u=0$ zur Umformung von f vor oder nach der in Bezug auf die X auszuführenden Differentiation anwendet, ist deswegen gleichgültig, weil bei dieser Differentiation u als constant angesehen wird.

Das Resultat der Elimination aus (2.) ist eine Invariante von f_0; und die Aufgabe besteht, wenn diese gefunden ist, darin, dieselbe durch die Coefficienten der gegebenen Function f auszudrücken. Dies geschieht aber wieder mit Hülfe des Theorems VII.; und demgemäss kann man den Gang, der zur Lösung des in den Gleichungen (1.) enthaltenen Problems einzuschlagen ist. in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem XX.

Um aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=u_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=u_2,\quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_r}=u_r,$$
$$u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_rx_r = 0,$$

wo f eine homogene Function der x von der n^{ten} Ordnung ist, die r Grössen x zu eliminiren, bilde man zunächst die Eliminationsgleichung für das System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2}=0,\quad \ldots\quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-1}}=0,$$

wo f_0 eine Function der $r-1$ Grössen X von der n^{ten} Ordnung bedeutet, und setze sie in die symbolische Form

$$(3.)\qquad 0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-1}).$$

Sodann ist die, durch Erweiterung der symbolischen Determinanten entstehende Gleichung

$$(4.)\qquad 0 = \Sigma\lambda\,\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2\ldots n_{r-1}u_r)$$

die symbolische Form der gesuchten Eliminationsgleichung, und man erhält aus derselben die wirkliche Gleichung, indem man die Producte

$$a_i a_k\ldots = b_i b_k\ldots \text{ etc.}$$

durch die entsprechenden Coefficienten der gegebenen Function f ersetzt.

Die aus dem System (2.) hervorgehende Endgleichung ist aber nothwendig für die Coefficienten jeder Gleichung vom $(n-1)^{r-1\,ten}$ Grade, mithin vom $(r-1)(n-1)^{r-2\,ten}$ Grade in Bezug auf die Coefficienten von f_0. Von demselben Grade muss also auch die Endgleichung des Systems (1.) in Bezug auf die Coefficienten von f sein. Da ferner die erstgenannte Endgleichung (3.) in Bezug auf die symbolischen Coefficienten vom Grade $n(r-1)(n-1)^{r-2}$ sein muss, so ergiebt sich daraus die Anzahl der Determinanten, welche in jedem Gliede der Form (3.) mit einander multiplicirt erscheinen, gleich $n(n-1)^{r-2}$, und dies muss also der Grad der Endgleichung (4.) des Systems (1.) in Bezug auf die u sein. Diese Bestimmungen geben folgendes Theorem:

Theorem XXI.

Die Gleichung, welche aus dem System

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=u_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=u_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial f}{\partial x_r}=u_r,$$

$$u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_rx_r = 0$$

durch Elimination der x hervorgeht, ist, wenn f eine homogene Function n^{ter} Ordnung bedeutet, von der Ordnung $(r-1)(n-1)^{r-2}$ in Bezug auf die Coefficienten von f, und von der Ordnung $n(n-1)^{r-2}$ in Bezug auf die Coefficienten u.

§. 16.

Ueber die Darstellung der Oberflächen n^{ter} Ordnung durch Gleichungen in Ebenencoordinaten.

Da diese Resultate auf den Fall $r=3$ im Vorigen bereits angewandt sind. so ist der nächste Fall der Anwendung, welcher sich darbietet, $r=4$,

oder die Aufgabe, *eine Oberfläche durch Ebenencoordinaten darzustellen.* Die Specialisirung des Theorems XXI. giebt für diesen Fall sofort:

Theorem XXII.

Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten ist vom Grade $n(n-1)^2$ in Bezug auf die Ebenencoordinaten selbst, und vom Grade $4(n-1)^2$ in Bezug auf die Coefficienten der Punktgleichung.

Die erste dieser Zahlen hat, auf einem ganz anderen Wege, Herr *Salmon* erhalten (Transactions of the royal Irish academy, vol. XXIII, p. 464).

In Bezug auf das Theorem XX. ist zu bemerken, dass die aus dem System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_3} = 0$$

entspringende Endgleichung nichts anderes ist, als die Bedingung, unter welcher eine Curve n^{ter} Ordnung $f_0 = 0$ einen Doppelpunkt hat, und somit lässt sich dies Theorem folgendermassen specialisiren:

Theorem XXIII.*

Um eine Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten darzustellen, bilde man die Bedingung, unter welcher eine Curve n^{ter} Ordnung einen Doppelpunkt hat, und setze sie in die symbolische Form

$$0 = \Sigma\lambda\, \Pi(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3).$$

Dann ist

$$0 = \Sigma\lambda\, \Pi(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 u_4)$$

die symbolische Form der gesuchten Gleichung der Oberfläche.

Es ist zu bemerken, dass die hier geforderten Operationen, in Folge der von Herrn *Sylvester* aufgestellten Methode, drei Veränderliche aus drei homogenen Gleichungen von gleichem Grade zu eliminiren, sämmtlich bekannt sind. Man kann also die Aufgabe, eine algebraische Fläche durch eine Gleichung in Ebenencoordinaten auszudrücken, im Princip als erledigt betrachten; wenn ich indess hier nur die zweite und dritte Ordnung näher beleuchten werde, so geschieht es deswegen, weil die Doppelpunktsbedingung für höhere Ordnungen bisher in einer vollkommen übersichtlichen Form nicht hat gegeben werden können.

Die Bedingung, unter welcher ein Kegelschnitt

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{33} x_3^2 = 0$$

einen Doppelpunkt erhält, ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man in dieser Gleichung die symbolischen Substitutionen ein:

$$a_{ik} = a_i a_k = b_i b_k = c_i c_k,$$

so erhält man zunächst:

$$a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die a, b, c auf alle Weisen mit einander vertauscht und die Summen aller entstehenden Formen nimmt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Daher ist die symbolische Form für die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Liniencoordinaten:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

oder, wenn

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{44}x_4^2 = 0$$

die Punktgleichung der Oberfläche ist, und man wieder durch die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k = b_i b_k = c_i c_k = a_{ik}$$

zu wirklichen Coefficienten zurückkehrt,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

welches die bekannte gewöhnliche Form ist.

§. 17.

Oberfläche dritter Ordnung in Ebenencoordinaten dargestellt.

Herr *Aronhold* hat die Bedingungsgleichung für den Doppelpunkt einer Curve dritter Ordnung in der Form

$$T^2-S^3 = 0$$

gegeben, wo die Invarianten T und S definirt sind durch die folgenden beiden symbolischen Darstellungen (dieses Journal Bd. 55, p. 106 und 145):

$$S = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}^2.$$

Setzt man also jetzt:

$$\Sigma = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix}^2,$$

und ersetzt in diesen Formen die Producte

$$a_i a_k a_h, \quad b_i b_k b_h, \quad \dots \quad f_i f_k f_h$$

durch die entsprechenden Coefficienten der Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, so ist die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten nach dem Vorigen

$$\mathrm{T}^2-\Sigma^3 = 0.$$

Dies ist eine ganz ähnliche Form wie die oben für Curven vierter Ordnung gefundene. Es mag dabei bemerkt sein, dass man diese Gleichung in anderer Form auch genau ebenso aufstellen kann, wie Herr *Hesse* dies in Bezug auf die Curven vierter Ordnung (dieses Journal Bd. 41) gethan hat. Doch sind jene Darstellungen von den hier gegebenen so verschieden, dass der Nachweis

einer thatsächlichen Uebereinstimmung beider Formen zu den schwierigsten Problemen der Algebra gehören dürfte.

Von den beiden Formen Σ, T ist die erste vierter Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen u und ebenso in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Fläche, die andere in beiden Beziehungen sechster Ordnung. Die beiden Gleichungen, welche entstehen, indem man diese Formen gleich Null setzt, stellen selbst zwei Oberflächen dar, welche mit der gegebenen Fläche in einer einfachen Beziehung stehen. Denn die Tangentenebenen der Fläche $\Sigma = 0$ sind offenbar solche Ebenen, welche die gegebene Fläche in Curven schneiden, für die $S = 0$ ist; so wie die Tangentenebenen von $\mathrm{T} = 0$ die gegebene Fläche in Curven schneiden, für die $T = 0$ ist. Da nun, wie ich in einem früheren Aufsatz nachgewiesen habe, die geometrische Bedeutung von $S = 0$ darin besteht, dass die Wendetangenten der Schnittcurve zu drei durch drei Punkte gehen, sowie die Bedeutung von $T = 0$ darin, dass die Schnittcurve und ihre Determinante wechselweise von ihren Wendetangenten berührt werden, so kann man folgendes Theorem aufstellen:

Theorem XXIV.

Alle Ebenen, von denen eine Fläche dritter Ordnung so geschnitten wird, dass die Wendetangenten der Schnittcurve zu dreien durch drei Punkte gehen, umhüllen eine Fläche vierter Klasse

$$\Sigma = 0.$$

Alle Ebenen hingegen, von denen die Fläche so geschnitten wird, dass die Schnittcurve und ihre Determinante jede die Wendetangenten der anderen berührt, umhüllen eine Fläche sechster Klasse

$$\mathrm{T} = 0.$$

Aus den Ausdrücken Σ und T *setzt sich die Gleichung der Fläche dritter Ordnung in Ebenencoordinaten so zusammen, dass sie die Gestalt annimmt:*

$$(1.) \quad \mathrm{T}^2 - \Sigma^3 = 0.$$

Die gemeinschaftlichen Tangentenebenen der beiden Flächen $\Sigma = 0$, $\mathrm{T} = 0$ sind daher auch Tangentenebenen der Oberfläche dritter Ordnung selbst. Die Fläche aber, in welche dieselbe, durch das Hinzutreten neuer Zweige, bei ihrer Darstellung in Liniencoordinaten übergeht, geht, wenn man Tangentenebenen betrachtet, welche den gedachten sehr nahe liegen, über in

$$(d\mathrm{T})^2 = 0.$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass jede dieser Ebenen zwei verschiedene

Zweige der Oberfläche (1.) in demselben Punkte berührt, und zwar in demselben Punkte, in welchem auch die Fläche $\mathrm{T}=0$ von jenen Ebenen berührt wird. Diese Berührungspunkte aber kann man noch in anderer Beziehung betrachten. Denn für die Schnittcurve der fraglichen Ebenen mit der gegebenen Fläche dritter Ordnung verschwinden beide Invarianten S und T, und diese Curven haben also im Berührungspunkte einen Rückkehrpunkt; diese Punkte aber bilden bekanntlich die *Wendecurve* der Fläche, in welcher dieselbe von der Determinantenfläche geschnitten wird. Längs dieser Curve also berühren sich zwei Zweige der Fläche

$$\mathrm{T}^2-\Sigma^3 = 0,$$

und auch die Fläche $\mathrm{T}=0$ geht durch die Wendecurve hindurch. Ich fasse diese Bemerkungen in folgendem Theorem zusammen:

Theorem XXV.

Die Oberfläche, welche aus einer Fläche dritter Ordnung bei ihrer Darstellung durch Ebenencoordinaten entsteht, enthält zwei Zweige, welche sich in der Wendecurve der Fläche dritter Ordnung berühren. Durch dieselbe Curve geht auch die Fläche sechster Klasse $\mathrm{T}=0$, *(vgl. das vorige Theorem); und die Tangentenebenen der Oberfläche in den Punkten der Wendecurve berühren nicht blos jene beiden Zweige, sondern in denselben Punkten auch die Fläche* $\mathrm{T}=0$. *Dieselben berühren ferner auch* $\Sigma=0$, *und zwar bilden sie das vollständige System von gemeinschaftlichen Tangentenebenen, welches den Flächen* $\Sigma=0$, $\mathrm{T}=0$ *zukommt.*

§. 18.

Ebener Schnitt einer Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten dargestellt.

Das Problem des §. 15 kann man noch etwas verallgemeinern, und zwar in folgender Weise.

Es sei f eine Function n^{ter} Ordnung mit r Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_r$. Seien ferner folgende s lineare Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_1^{(1)}x_1+u_2^{(1)}x_2+\dots+u_r^{(1)}x_r,\\ u^{(2)} &= u_1^{(2)}x_1+u_2^{(2)}x_2+\dots+u_r^{(2)}x_r,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ u^{(s)} &= u_1^{(s)}x_1+u_2^{(s)}x_2+\dots+u_r^{(s)}x_r, \end{aligned}$$

wo $s<r$ sein soll. Das gegebene System soll dann aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad u^{(1)}=0,\quad u^{(2)}=0,\quad \dots\quad u^{(s)}=0$$

bestehen und aus den Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \mu^{(1)} u_1^{(1)} + \mu^{(2)} u_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_1^{(s)}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \mu^{(1)} u_2^{(1)} + \mu^{(2)} u_2^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_2^{(s)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} = \mu^{(1)} u_r^{(1)} + \mu^{(2)} u_r^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_r^{(s)}, \end{cases}$$

in welchen $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, ... $\mu^{(s)}$ unbestimmte Factoren bedeuten. Diese letzten Gleichungen kann man wieder in die symbolische Form zusammenfassen:

$$(3.)\quad \delta f = \mu^{(1)} \delta u^{(1)} + \mu^{(2)} \delta u^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} \delta u^{(s)}.$$

Führt man also als unabhängige Veränderliche $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots u^{(s)}, X_1, X_2, \ldots X_{r-s}$ ein, so verwandelt sich mit Rücksicht auf (1.) die Function f in eine Function f_0 der $r-s$ Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots X_{r-s}$, und aus der symbolischen Gleichung (3.) erhält man:

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-s}} = 0.$$

Die Aufgabe ist also auf die Elimination der X aus diesen Gleichungen zurückgeführt, und mit Hülfe des Theorems VIII. wird also die Elimination der x aus den Gleichungen (1.), (2.) auf folgende Weise zu bewerkstelligen sein:

Theorem XXVI.

Um aus den Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \mu^{(1)} u_1^{(1)} + \mu^{(2)} u_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_1^{(s)}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \mu^{(1)} u_2^{(1)} + \mu^{(2)} u_2^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_2^{(s)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_r} = \mu^{(1)} u_r^{(1)} + \mu^{(2)} u_r^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} u_r^{(s)}, \\ u_1^{(1)} x_1 + u_2^{(1)} x_2 + \cdots + u_r^{(1)} x_r = 0, \\ u_1^{(2)} x_1 + u_2^{(2)} x_2 + \cdots + u_r^{(2)} x_r = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1^{(s)} x_1 + u_2^{(s)} x_2 + \cdots + u_r^{(s)} x_r = 0, \end{cases}$$

wo f eine homogene Function der x von der n^{ten} Ordnung ist, die Grössen x, μ zu eliminiren, bilde man zunächst die Eliminationsgleichung für das System

$$\frac{\partial f_0}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f_0}{\partial X_{r-s}} = 0,$$

wo f_0 eine homogene Function der $r-s$ Grössen X von der n^{ten} Ordnung bedeutet, und setze sie in die symbolische Form:

$$(5.)\quad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma\pm a_1 b_2 \dots n_{r-s}).$$

Sodann ist die, durch Erweiterung der symbolischen Determinanten entstehende Gleichung:

$$(6.)\quad 0 = \Sigma\lambda\Pi(\dot{\Sigma}\pm a_1 b_2 \dots n_{r-s} u^{(1)}_{r-s+1} u^{(2)}_{r-s+2} \dots u^{(s)}_{r})$$

die symbolische Form der gesuchten Eliminationsresultante; und man erhält aus derselben die wirkliche Gleichung, indem man die Producte

$$a_i a_k \dots = b_i b_k \dots \text{ etc.}$$

durch die entsprechenden Coefficienten der gegebenen Function f ersetzt.

Der wirkliche Werth der Gleichung (5.) ist für die Coefficienten von f_0 von der $(r-s)(n-1)^{r-s-1\text{ten}}$ Ordnung; und von eben dieser Ordnung muss also auch (6.) für die Coefficienten von f sein. Der Ausdruck (5.) ist aber alsdann auch von der Ordnung $n.(r-s).(n-1)^{r-s-1}$ für die symbolischen Coefficienten; und in jedem seiner Terme kommen also $n.(n-1)^{r-s-1}$ symbolische Determinanten mit einander multiplicirt vor. Dies giebt sonach den Satz:

Theorem XXVII.

Die Endgleichung des Systems (4.) ist vom $(r-s)(n-1)^{r-s-1\text{ten}}$ Grade für die Coefficienten der Function f, und vom $n.(n-1)^{r-s-1\text{ten}}$ für die Coefficienten jeder der linearen Gleichungen.

Diese Betrachtungen finden in der Raumgeometrie eine Anwendung, wenn man $r=4$, $s=2$ setzt. Denn alsdann wird $f=0$ die Gleichung einer Oberfläche n^{ter} Ordnung, und von den beiden linearen Gleichungen, welche hier durch

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$
$$v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$$

bezeichnet sein mögen, bezeichne die erste eine beliebige, die zweite eine gegebene Ebene. Das System (4.) drückt so aus, dass die Ebene $u=0$ die Schnittcurve von $f=0$, $v=0$ berühre; und die Eliminationsgleichung wird die Gleichung der ebenen Curve, in welcher $f=0$, $v=0$ sich schneiden, in Ebenencoordinaten. Man hat daher das

Theorem XXVIII.

Um die Gleichung der Schnittcurve einer Ebene

$$v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$$

mit einer Oberfläche n^{ter} Ordnung $f=0$ in Ebenencoordinaten zu bestimmen,

stelle man die Bedingung, unter welcher eine Gleichung n^{ter} Ordnung zwei gleiche Wurzeln hat, in der symbolischen Form dar:

$$0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma \pm a_1 b_2).$$

Es ist dann

$$0 = \Sigma\lambda\Pi(\Sigma \pm a_1 b_2 u_3 v_4)$$

die symbolische Form für die gesuchte Gleichung, und man findet die wirkliche daraus, indem man für die Producte

$$a_i a_k \ldots = b_i b_k \ldots$$

die entsprechenden Coefficienten der Oberflächengleichung einsetzt.

Und aus dem Theorem XXVII. erhält man sogleich:

Theorem XXIX.

Die Gleichung der Schnittcurve einer Ebene mit einer Oberfläche n^{ter} Ordnung in Ebenencoordinaten ist von der $2(n-1)^{ten}$ Ordnung für die Coordinaten der Oberfläche, von der $n.(n-1)^{ten}$ für die Ebenencoordinaten und für die Coefficienten der gegebenen Ebene.

Offenbar kann man auch, statt die symbolische Form der Bedingung zweier gleichen Wurzeln zu benutzen, von der symbolischen Form der Gleichung einer Curve in der Ebene durch Liniencoordinaten dargestellt ausgehen, jede ihrer symbolischen Determinanten um eine Reihe erweitern, und als neue Reihe die Coefficienten der Schnittebene hinzufügen. In dieser Weise erkennt man, dass jede Darstellung einer ebenen Curve in Liniencoordinaten, welche als rationaler Ausdruck einfacherer Invarianten erscheint, eine eben solche Darstellung für ebene Raumcurven gleicher Ordnung bietet. So ist z. B. jeder Schnitt einer Oberfläche vierter Ordnung mit einer Ebene durch eine Gleichung der Form

$$P^3 - 3Q^2 = 0$$

darstellbar, weil die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten diese Gestalt annimmt.

Die angeführten Beispiele und Sätze werden genügen, um den Nutzen erkennen zu lassen, welcher sich aus der Anwendung der hier befolgten Methode für die Erkenntniss des Formenzusammenhanges gewinnen lässt.

Carlsruhe, im September 1860.

Développements relatifs au §. 3 des Recherches de *Dirichlet* sur un problème d'Hydrodynamique, vol. 58, pag. 181 et suivantes de ce Journal.

(Par M. *F. Brioschi* à Pavie.)

---

1. Le §. 3 de l'important mémoire de *Dirichlet* est consacré à démontrer que le mouvement de l'ellipsoide fluide peut se décomposer en deux mouvements simples, l'un de translation, l'autre de rotation autour d'une droite. La connaissance des vitesses qui composent ces deux mouvements dépend de la détermination des cosinus des angles que trois axes nouveaux des ξ, η, ζ forment avec les axes donnés des x, y, z; ou enfin de la résolution d'une équation du troisième degré. Bien que cette décomposition comme l'a déjà observé *Dirichlet* ne soit pas d'une utilité réelle pour la solution du problème, nous croyons néanmoins qu'elle jette assez de clarté sur la question pour nous engager à l'approfondir.

En adoptant les signes de *Dirichlet* on a pour les vitesses u, v, w les valeurs (équations (1.) du §. 3):

$$u = gx+hy+kz, \quad v = g'x+h'y+k'z, \quad w = g''x+h''y+k''z,$$

que l'on peut présenter sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u &= gx+\tfrac{1}{2}(h+g')y+\tfrac{1}{2}(k+g'')z+\tfrac{1}{2}(k-g'')z-\tfrac{1}{2}(g'-h)y, \\ v &= \tfrac{1}{2}(g'+h)x+h'y+\tfrac{1}{2}(k'+h'')z+\tfrac{1}{2}(g'-h)x-\tfrac{1}{2}(h''-k')z, \\ w &= \tfrac{1}{2}(g''+k)x+\tfrac{1}{2}(h''+k')y+k''z+\tfrac{1}{2}(h''-k')y-\tfrac{1}{2}(k-g'')x. \end{aligned}$$

En posant

$$(1.) \quad p' = \tfrac{1}{2}(h''-k'), \quad q' = \tfrac{1}{2}(k-g''), \quad r' = \tfrac{1}{2}(g'-h),$$

on aura donc

$$u = u_1+u_2, \quad v = v_1+v_2, \quad w = w_1+w_2$$

et

$$(2.) \quad \begin{cases} u_1 = gx+\tfrac{1}{2}(h+g')y+\tfrac{1}{2}(k+g'')z, & u_2 = q'z-r'y, \\ v_1 = \tfrac{1}{2}(g'+h)x+h'y+\tfrac{1}{2}(k'+h'')z, & v_2 = r'x-p'z, \\ w_1 = \tfrac{1}{2}(g''+k)x+\tfrac{1}{2}(h''+k')y+k''z, & w_2 = p'y-q'x. \end{cases}$$

On pourra par conséquent supposer le mouvement de l'ellipsoide décomposé en deux mouvements; l'un de translation défini par les vitesses u_1, v_1, w_1

parallèles aux axes des x, y, z; l'autre de rotation défini par les vitesses angulaires p', q', r' autour des mêmes axes. Rapportons ces mouvements aux trois nouveaux axes des ξ, η, ζ; et soient p, q, r les vitesses parallèles à ces axes, on aura avec *Dirichlet:*

$$(3.)\quad \begin{cases} p = \alpha u_1 + \alpha' v_1 + \alpha'' w_1, & \xi = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ q = \beta u_1 + \beta' v_1 + \beta'' w_1, & \eta = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ r = \gamma u_1 + \gamma' v_1 + \gamma'' w_1, & \zeta = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Substituons pour u_1, v_1, w_1 les valeurs (2.) et faisons

$$(4.)\quad \begin{cases} \alpha g + \frac{1}{2}\alpha'(g'+h) + \frac{1}{2}\alpha''(g''+k) = a\alpha, \\ \frac{1}{2}\alpha(h+g') + \alpha' h' + \frac{1}{2}\alpha''(h''+k') = a\alpha', \\ \frac{1}{2}\alpha(k+g'') + \frac{1}{2}\alpha'(k'+h'') + \alpha'' k'' = a\alpha'', \end{cases}$$

où a désigne une indéterminée; posons encore les deux systèmes d'équations analogues à (4.) que l'on obtient en remplaçant α, α', α'', a d'abord par β, β', β'', b et puis par γ, γ', γ'', c, nous aurons

$$p = a(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z), \quad q = b(\beta x + \beta' y + \beta'' z), \quad r = c(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)$$

ou à cause des relations (3.):

$$(5.)\quad p = a\xi, \quad q = b\eta, \quad r = c\zeta.$$

En multipliant les équations (1.) par λ, λ', λ'' on a:

$$\lambda p' + \lambda' q' + \lambda'' r' = \tfrac{1}{2}\left(n\frac{dm}{dt} + n'\frac{dm'}{dt} + n''\frac{dm''}{dt} - m\frac{dn}{dt} - m'\frac{dn'}{dt} - m''\frac{dn''}{dt}\right),$$

mais des équations différentielles du problème (équations (2.) pag. 190) on obtient par une première intégration:

$$(6.)\quad n\frac{dm}{dt} + n'\frac{dm'}{dt} + n''\frac{dm''}{dt} - m\frac{dn}{dt} - m'\frac{dn'}{dt} - m''\frac{dn''}{dt} = 2p_0,$$

donc:

$$\lambda p' + \lambda' q' + \lambda'' r' = p_0$$

et de même:

$$\mu p' + \mu' q' + \mu'' r' = q_0, \qquad \nu p' + \nu' q' + \nu'' r' = r_0.$$

On en déduit

$$p' = l p_0 + m q_0 + n r_0, \quad q' = l' p_0 + m' q_0 + n' r_0, \quad r' = l'' p_0 + m'' q_0 + n'' r_0$$

et comme pour $t = 0$ les équations

$$l = m' = n'' = 1, \qquad l' = l'' = m = m'' = n = n' = 0$$

ont lieu, on en conclut que les constantes p_0, q_0, r_0 sont les valeurs correspondantes à $t = 0$ des vitesses angulaires p', q', r'. Soient p_1, q_1, r_1 les

vitesses angulaires autour des axes des ξ, η, ζ on aura évidemment:

$$(7.)\quad \begin{cases} p_1 = p_0(l\alpha+l'\alpha'+l''\alpha'')+q_0(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')+r_0(n\alpha+n'\alpha'+n''\alpha''), \\ q_1 = p_0(l\beta+l'\beta'+l''\beta'')+q_0(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')+r_0(n\beta+n'\beta'+n''\beta''), \\ r_1 = p_0(l\gamma+l'\gamma'+l''\gamma'')+q_0(m\gamma+m'\gamma'+m''\gamma'')+r_0(n\gamma+n'\gamma'+n''\gamma''). \end{cases}$$

Au moyen des relations

$$lg+\tfrac{1}{2}l'(h+g')+\tfrac{1}{2}l''(k+g'') = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda\frac{dP}{dt}+\mu\frac{dR'}{dt}+\nu\frac{dQ'}{dt}\Big) = E,$$

$$\tfrac{1}{2}l(g'+h)+l'h'+\tfrac{1}{2}l''(k'+h'') = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda'\frac{dP}{dt}+\mu'\frac{dR'}{dt}+\nu'\frac{dQ'}{dt}\Big) = E',$$

$$\tfrac{1}{2}l(g''+k)+\tfrac{1}{2}l'(h''+k')+l''k'' = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda''\frac{dP}{dt}+\mu''\frac{dR'}{dt}+\nu''\frac{dQ'}{dt}\Big) = E''$$

les équations (4.) peuvent être mises sous la forme suivante:

$$(8.)\quad \begin{cases} E\alpha+E'\alpha'+E''\alpha'' = a(l\alpha+l'\alpha'+l''\alpha''), \\ F\alpha+F'\alpha'+F''\alpha'' = a(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha''), \\ G\alpha+G'\alpha'+G''\alpha'' = a(n\alpha+n'\alpha'+n''\alpha''), \end{cases}$$

où les quantités F, G etc, sont données par les équations

$$F = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda\frac{dR'}{dt}+\mu\frac{dQ}{dt}+\nu\frac{dP'}{dt}\Big),\quad G = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda\frac{dQ'}{dt}+\mu\frac{dP'}{dt}+\nu\frac{dR}{dt}\Big),\quad \text{etc.}$$

Posons:

$$(9.)\quad \begin{cases} \alpha = A_1l+A_2m+A_3n, & \beta = B_1l+B_2m+B_3n, & \gamma = C_1l+C_2m+C_3n, \\ \alpha' = A_1l'+A_2m'+A_3n', & \beta' = B_1l'+B_2m'+B_3n', & \gamma' = C_1l'+C_2m'+C_3n', \\ \alpha'' = A_1l''+A_2m''+A_3n'', & \beta'' = B_1l''+B_2m''+B_3n'', & \gamma'' = C_1l''+C_2m''+C_3n'', \end{cases}$$

on aura:

$$l\alpha+l'\alpha'+l''\alpha'' = A_1P+A_2R'+A_3Q',\quad E\alpha+E'\alpha'+E''\alpha'' = \tfrac{1}{2}\Big(A_1\frac{dP}{dt}+A_2\frac{dR'}{dt}+A_3\frac{dQ'}{dt}\Big),$$

etc.,

par conséquent les équations (8.) deviennent:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Big(\tfrac{1}{2}\frac{dP}{dt}-aP\Big)A_1+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dR'}{dt}-aR'\Big)A_2+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dQ'}{dt}-aQ'\Big)A_3 = 0, \\ \Big(\tfrac{1}{2}\frac{dR'}{dt}-aR'\Big)A_1+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dQ}{dt}-aQ\Big)A_2+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dP'}{dt}-aP'\Big)A_3 = 0, \\ \Big(\tfrac{1}{2}\frac{dQ'}{dt}-aQ'\Big)A_1+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dP'}{dt}-aP'\Big)A_2+\Big(\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}-aR\Big)A_3 = 0, \end{cases}$$

et les indéterminées a, b, c seront les racines de l'équation en θ:

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} P\theta-\frac{1}{2}\frac{dP}{dt} & R'\theta-\frac{1}{2}\frac{dR'}{dt} & Q'\theta-\frac{1}{2}\frac{dQ'}{dt} \\ R'\theta-\frac{1}{2}\frac{dR'}{dt} & Q\theta-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dt} & P'\theta-\frac{1}{2}\frac{dP'}{dt} \\ Q'\theta-\frac{1}{2}\frac{dQ'}{dt} & P'\theta-\frac{1}{2}\frac{dP'}{dt} & R\theta-\frac{1}{2}\frac{dR}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

D'après un théorème connu ces racines sont toutes réelles; de plus le coefficient de θ^3, c. à d. le déterminant

$$\begin{vmatrix} P & R' & Q' \\ R' & Q & P' \\ Q' & P' & R \end{vmatrix}$$

est égal à l'unité, et le coefficient de θ^2, qui est la dérivée de ce déterminant prise par rapport au temps est égal à zéro. On a par conséquent:

$$a+b+c = 0.$$

Les équations (10.) et celles qui leur sont analogues, conjointement avec les équations

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\quad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1,\quad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$$

donnent en général les valeurs de A_1, A_2, ... et les équations (9.) donnent les valeurs de α, α', ... Enfin si des équations (3.), (9.) on tire les suivantes

$$\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z = A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta,$$
$$\mu x+\mu' y+\mu'' z = A_2\xi+B_2\eta+C_2\zeta,$$
$$\nu x+\nu' y+\nu'' z = A_3\xi+B_3\eta+C_3\zeta,$$

on en conclut que l'ellipsoide fluide qui a lieu à la fin du temps t, rapporté aux axes des ξ, η, ζ, est représenté par l'équation:

$$(12.)\quad \frac{1}{A^2}(A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta)^2+\frac{1}{B^2}(A_2\xi+B_2\eta+C_2\zeta)^2+\frac{1}{C^2}(A_3\xi+B_3\eta+C_3\zeta)^2 = 1.$$

2. Passons à la considération d'un cas particulier très-intéressant. Supposons qu'au commencement du temps t les axes mobiles des ξ, η, ζ coincident avec les axes fixes des x, y, z; et que les axes des ξ, η, ζ soient pour toute la durée du mouvement les directions des axes principaux de l'ellipsoide. Pour que la première condition soit remplie il faut que l'on ait

$$(13.)\quad (A_1)_0=(B_2)_0=(C_3)_0=1,\quad (A_2)_0=(A_3)_0=(B_1)_0=(B_3)_0=(C_1)_0=(C_2)_0=0;$$

et l'équation (12.) montre que l'on peut satisfaire à la seconde condition en

supposant que pour toute la durée du mouvement on ait

$$A_2 = A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_2 = 0.$$

Des équations (10.), (11.) on déduit que cette dernière hypothèse entraîne les conditions suivantes:

$$P' = 0, \quad Q' = 0, \quad R' = 0,$$

$$a = \frac{1}{2P}\frac{dP}{dt}, \quad b = \frac{1}{2Q}\frac{dQ}{dt}, \quad b = \frac{1}{2R}\frac{dR}{dt},$$

de plus, comme les équations (9.) nous donnent:

$$A_1^2 = \frac{1}{P}, \quad B_2^2 = \frac{1}{Q}, \quad C_3^2 = \frac{1}{R},$$

on voit que toutes les conditions (13.) sont remplies et l'on aura:

$$(14.) \quad \alpha = \frac{l}{\sqrt{P}}, \quad \beta = \frac{m}{\sqrt{Q}}, \quad \gamma = \frac{n}{\sqrt{R}}, \quad \text{etc.}$$

Enfin en posant:

$$A\sqrt{P} = U, \quad B\sqrt{Q} = V, \quad C\sqrt{R} = W$$

l'équation de l'ellipsoide rapportée aux axes des ξ, η, ζ sera:

$$\frac{\xi^2}{U^2} + \frac{\eta^2}{V^2} + \frac{\zeta^2}{W^2} = 1;$$

et les vitesses de translation et de rotation (équations (5.) et (7.)) seront

$$(15.) \quad \begin{cases} p = \frac{\xi}{U}\frac{dU}{dt}, & q = \frac{\eta}{V}\frac{dV}{dt}, & r = \frac{\zeta}{W}\frac{dW}{dt}, \\ p_1 = \frac{p_0}{A}U, & q_1 = \frac{q_0}{B}V, & r_1 = \frac{r_0}{C}W. \end{cases}$$

En désignant par x_0, y_0, z_0 les valeurs initiales de x, y, z pour lesquelles *Dirichlet* a adopté les lettres a, b, c, et par ξ_0, η_0, ζ_0 celles de ξ, η, ζ on a:

$$x_0 = \xi_0, \quad y_0 = \eta_0, \quad z_0 = \zeta_0,$$

$$\frac{\xi}{U} = \frac{\xi_0}{A}, \quad \frac{\eta}{V} = \frac{\eta_0}{B}, \quad \frac{\zeta}{W} = \frac{\zeta_0}{C}$$

et par conséquent

$$(16.) \quad p = \frac{\xi_0}{A}\frac{dU}{dt}, \quad q = \frac{\eta_0}{B}\frac{dV}{dt}, \quad r = \frac{\zeta_0}{C}\frac{dW}{dt}.$$

Dans le cas que nous considérons les équations différentielles ((*a.*) pag. 190 du mémoire de *Dirichlet*) peuvent être transformées, eu égard aux équations intégrales (6.) déjà obtenues, et réduites aux six équations suivantes:

$$(17.)\quad\begin{cases} U\dfrac{d^2U}{dt^2}-U^2(\omega^2-p_1^2) = 2\sigma-2\varepsilon L,\\ V\dfrac{d^2V}{dt^2}-V^2(\omega^2-q_1^2) = 2\sigma-2\varepsilon M,\\ W\dfrac{d^2W}{dt^2}-W^2(\omega^2-r_1^2) = 2\sigma-2\varepsilon N,\\ p_1\left(\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dt}-\dfrac{1}{W}\dfrac{dW}{dt}\right)+q_1r_1 = 0,\\ q_1\left(\dfrac{1}{W}\dfrac{dW}{dt}-\dfrac{1}{U}\dfrac{dU}{dt}\right)+r_1p_1 = 0,\\ r_1\left(\dfrac{1}{U}\dfrac{dU}{dt}-\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dt}\right)+p_1q_1 = 0 \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter l'équation:

$$UVW = ABC.$$

Les quantités ω, L, M, N sont données par les équations

$$\omega^2 = p_1^2+q_1^2+r_1^2,$$

$$L=\pi\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\frac{U^2}{U^2+s}ds,\quad M=\pi\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\frac{V^2}{V^2+s}ds,\quad N=\pi\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\frac{W^2}{W^2+s}ds,$$

où

$$\triangle = +\sqrt{\left\{\left(1+\frac{s}{U^2}\right)\left(1+\frac{s}{V^2}\right)\left(1+\frac{s}{W^2}\right)\right\}}.$$

Des trois dernières équations (17.) on déduit la suivante:

$$q_1^2r_1^2+r_1^2p_1^2+p_1^2q_1^2 = 0,$$

donc pour toute la durée du mouvement ou les trois vitesses angulaires autour des axes mobiles sont nulles ou du moins deux d'entre elles. Dans le premier cas les cosinus α, α', ... sont, comme on sait, indépendants du temps, par conséquent pour toute la durée du mouvement les axes des ξ, η, ζ sont parallèles aux axes des x, y, z. Les équations:

$$U\frac{d^2U}{dt^2}=2\sigma-2\varepsilon L,\quad V\frac{d^2V}{dt^2}=2\sigma-2\varepsilon M,\quad W\frac{d^2W}{dt^2}=2\sigma-2\varepsilon N,$$
$$UVW = ABC$$

donneront les valeurs des demi-axes de l'ellipsoide à la fin du temps t; les composantes de la vitesse parallèles aux axes des x, y, z et la valeur de σ. Quant aux valeurs des quantités l, l', ... on a évidemment à cause des équations (14):

$$l=\frac{U}{A},\quad m'=\frac{V}{B},\quad n''=\frac{W}{C},$$

tandis que toutes les autres sont nulles.

Supposons en second lieu que p_1 et q_1 s'évanouissent, mais que r_1 soit différent de zéro. Posons

$$\int r_1 dt = \frac{r_0}{C}\int W dt = \varrho$$

et indiquons par ϱ_0 la valeur de ϱ correspondante à $t=0$, on a, comme on sait,

$$\alpha=\beta'=\cos(\varrho-\varrho_0),\quad \beta=-\alpha'=\sin(\varrho-\varrho_0),\quad \gamma''=1,\quad \alpha''=\beta''=\gamma=\gamma'=0,$$

par conséquent:

$$\frac{Al}{U}=\frac{Bm'}{V}=\cos(\varrho-\varrho_0),\ \frac{Bm}{V}=-\frac{Al'}{U}=\sin(\varrho-\varrho_0),\ n''=\frac{W}{C},\ l''=m''=n=n'=0.$$

La dernière des équations (17.) prouve que dans ce cas on a:

$$\frac{U}{A}=\frac{V}{B}$$

ou bien U, V et par conséquent W constantes. Si l'on suppose $A=B$ ou ce qui est la même chose $U=V$ pour toute la durée du mouvement on a le cas discuté avec tant de finesse par *Dirichlet* dans les §§. 6—8 de son mémoire. Si U, V, W sont constantes on aura $U=A$, $V=B$, $W=C$, le mouvement de l'ellipsoide se réduit alors à un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe des z, et les équations (17.) donnent la valeur de la vitesse angulaire:

$$r_0^2 = \frac{2\varepsilon\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\,\frac{s}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)}ds$$

et de plus l'équation de condition de *Jacobi* pour les demi-axes A, B, C:

$$\sigma=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\,\frac{1}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)}ds=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{1}{\triangle}\,\frac{1}{\left(1+\frac{s}{C^2}\right)}ds.$$

Enfin comme $\varrho=r_0 t$ on aura:

$$l=m'=\cos r_0 t,\quad m=-l'=\sin r_0 t,\quad n''=1,\quad n=n'=l''=m''=0.$$

3. L'introduction des axes mobiles ξ, η, ζ peut faire envisager le problème de *Dirichlet* sous le point de vue d'une question de mouvement relatif. En effet les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ déduites des équations (3.) étant substituées dans les équations du mouvement des fluides:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon\frac{dH}{dx}+\frac{dp}{dx}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}-\varepsilon\frac{dH}{dy}+\frac{dp}{dy}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}-\varepsilon\frac{dH}{dz}+\frac{dp}{dz}=0,$$

où H est le potentiel, p la pression, on trouve

$$(17.^*)\quad \begin{cases} \xi\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}+\eta\dfrac{d^2\beta}{dt^2}+\zeta\dfrac{d^2\gamma}{dt^2}+2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right) \\ \qquad +\alpha\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\beta\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\gamma\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \varepsilon\dfrac{dH}{dx}-\dfrac{dp}{dx}, \\ \xi\dfrac{d^2\alpha'}{dt^2}+\eta\dfrac{d^2\beta'}{dt^2}+\zeta\dfrac{d^2\gamma'}{dt^2}+2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha'}{dt}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\beta'}{dt}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{d\gamma'}{dt}\right) \\ \qquad +\alpha'\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\beta'\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\gamma'\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \varepsilon\dfrac{dH}{dy}-\dfrac{dp}{dy}, \\ \xi\dfrac{d^2\alpha''}{dt^2}+\eta\dfrac{d^2\beta''}{dt^2}+\zeta\dfrac{d^2\gamma''}{dt^2}+2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha''}{dt}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\beta''}{dt}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{d\gamma''}{dt}\right) \\ \qquad +\alpha''\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\beta''\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\gamma''\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \varepsilon\dfrac{dH}{dz}-\dfrac{dp}{dz}. \end{cases}$$

Or en désignant par p_1, q_1, r_1 les vitesses angulaires autour des axes mobiles des ξ, η, ζ, avec lesquelles ces axes mobiles passent de leur position correspondante au temps t à leur nouvelle position correspondante au temps $t+dt$, on a

$$p_1=\gamma\frac{d\beta}{dt}+\gamma'\frac{d\beta'}{dt}+\gamma''\frac{d\beta''}{dt},\qquad q_1=\alpha\frac{d\gamma}{dt}+\alpha'\frac{d\gamma'}{dt}+\alpha''\frac{d\gamma''}{dt},$$

$$r_1=\beta\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta''\frac{d\alpha''}{dt}$$

et par conséquent

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\alpha'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}+\alpha''\frac{d^2\alpha''}{dt^2}=-(q_1^2+r_1^2),\qquad \alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}+\alpha'\frac{d^2\beta'}{dt^2}+\alpha''\frac{d^2\beta''}{dt^2}=q_1p_1-\frac{dr_1}{dt}.$$

$$\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}+\beta''\frac{d^2\alpha''}{dt^2}=p_1q_1+\frac{dr_1}{dt},\qquad \beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\beta'\frac{d^2\beta'}{dt^2}+\beta''\frac{d^2\beta''}{dt^2}=-(r_1^2+p_1^2),$$

$$\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\gamma'\frac{d^2\alpha'}{dt^2}+\gamma''\frac{d^2\alpha''}{dt^2}=p_1r_1-\frac{dq_1}{dt},\qquad \gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma'\frac{d^2\beta'}{dt^2}+\gamma''\frac{d^2\beta''}{dt^2}=q_1r_1+\frac{dp_1}{dt},$$

$$\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\alpha'\frac{d^2\gamma'}{dt^2}+\alpha''\frac{d^2\gamma''}{dt^2}=r_1p_1+\frac{dq_1}{dt},$$

$$\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\beta'\frac{d^2\gamma'}{dt^2}+\beta''\frac{d^2\gamma''}{dt^2}=r_1q_1-\frac{dp_1}{dt},$$

$$\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\gamma'\frac{d^2\gamma'}{dt^2}+\gamma''\frac{d^2\gamma''}{dt^2}=-(p_1^2+q_1^2),$$

donc en ajoutant les équations (17.*) après les avoir multipliées respectivement par les facteurs α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'', on obtient:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\left(q_1\frac{d\zeta}{dt}-r_1\frac{d\eta}{dt}\right)+\zeta\frac{dq_1}{dt}-\eta\frac{dr_1}{dt}+p_1\theta-\xi\omega^2 = \varepsilon\frac{dH}{d\xi}-\frac{dp}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\left(r_1\frac{d\xi}{dt}-p_1\frac{d\zeta}{dt}\right)+\xi\frac{dr_1}{dt}-\zeta\frac{dp_1}{dt}+q_1\theta-\eta\omega^2 = \varepsilon\frac{dH}{d\eta}-\frac{dp}{d\eta},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+2\left(p_1\frac{d\eta}{dt}-q_1\frac{d\xi}{dt}\right)+\eta\frac{dp_1}{dt}-\xi\frac{dq_1}{dt}+r_1\theta-\zeta\omega^2 = \varepsilon\frac{dH}{d\zeta}-\frac{dp}{d\zeta},$$

où

$$\theta=p_1\xi+q_1\eta+r_1\zeta,\qquad \omega^2=p_1^2+q_1^2+r_1^2.$$

De plus on aura:

$$(18.)\qquad \Sigma\left(\pm\frac{d\xi}{d\xi_0}\frac{d\eta}{d\eta_0}\frac{d\zeta}{d\zeta_0}\right) = 1.$$

Nous nous bornerons à appliquer ces formules au cas particulier considéré ci-dessus. Dans ce cas l'hypothèse de *Dirichlet* revient à supposer:

$$\frac{\xi}{U}=\frac{\xi_0}{A},\qquad \frac{\eta}{V}=\frac{\eta_0}{B},\qquad \frac{\zeta}{W}=\frac{\zeta_0}{C},$$

U, V, W étant les demi-axes de l'ellipsoide à la fin du temps t. On aura par conséquent:

$$\frac{dp}{d\xi}=-\frac{2\sigma}{U}\frac{\xi_0}{A},\qquad \frac{dp}{d\eta}=-\frac{2\sigma}{V}\frac{\eta_0}{B},\qquad \frac{dp}{d\zeta}=-\frac{2\sigma}{W}\frac{\zeta_0}{C}$$

et (*Laplace,* Mécanique Céleste T. 2, pag. 12):

$$\frac{dH}{d\xi}=-\frac{2L}{U}\frac{\xi_0}{A},\qquad \frac{dH}{d\eta}=-\frac{2M}{V}\frac{\eta_0}{B},\qquad \frac{dH}{d\zeta}=-\frac{2N}{W}\frac{\zeta_0}{C}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations trouvées ci-dessus et égalant à zéro les coefficients de ξ_0, η_0, ζ_0 dans chacune d'elles on obtiendra les neuf équations suivantes:

$$(19.)\quad\left\{\begin{aligned}
&U\frac{d^2U}{dt^2}-U^2(\omega^2-p_1^2)=2\sigma-2\varepsilon L,\qquad V\frac{d^2V}{dt^2}-V^2(\omega^2-q_1^2)=2\sigma-2\varepsilon M,\\
&W\frac{d^2W}{dt^2}-W^2(\omega^2-r_1^2)=2\sigma-2\varepsilon N,\\
&2p_1\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}+\frac{dp_1}{dt}+q_1r_1=0,\qquad 2q_1\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}+\frac{dq_1}{dt}+r_1p_1=0,\\
&2p_1\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}+\frac{dp_1}{dt}-q_1r_1=0,\qquad 2q_1\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}+\frac{dq_1}{dt}-r_1p_1=0,\\
&2r_1\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}+\frac{dr_1}{dt}+p_1q_1=0,\\
&2r_1\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}+\frac{dr_1}{dt}-p_1q_1=0,
\end{aligned}\right.$$

et à cause de l'équation (18.) on aura:

$$UVW = ABC.$$

Les six dernières équations (19.) nous donnent:

$$p_1\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}-\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}\right)+q_1r_1=0,\quad q_1\left(\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}-\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}\right)+r_1p_1=0,$$

$$r_1\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}-\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\right)+p_1q_1=0,$$

de plus en observant que

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}+\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}+\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}=0$$

on aura:

$$\frac{1}{p_1}\frac{dp_1}{dt}=\frac{1}{U}\frac{dU}{dt},\quad \frac{1}{q_1}\frac{dq_1}{dt}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dt},\quad \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt}=\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}$$

ou en intégrant:

$$p_1=\frac{p_0}{A}U,\quad q_1=\frac{q_0}{B}V,\quad r_1=\frac{r_0}{C}W.$$

On arrive ainsi à toutes les formules trouvées au n°. 2.

4. Nous ferons enfin brièvement remarquer une transformation des équations différentielles de *Dirichlet* par laquelle elles peuvent être réduites à la forme canonique. Posons:

$$\begin{array}{lll} x_1=lA, & x_2=l'A, & x_3=l''A,\\ y_1=mB, & y_2=m'B, & y_3=m''B,\\ z_1=nC, & z_2=n'C, & z_3=n''C, \end{array}\qquad k=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=ABC$$

et:

$$\triangle=\frac{1}{ABC}\sqrt{\left\{s^3+s^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+\cdots+z_3^2)+s\left(\left(\frac{dk}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dk}{dx_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dk}{dz_3}\right)^2\right)+k^2\right\}};$$

les équations différentielles (a.) du mémoire de *Dirichlet* (pag. 190) conduisent aux suivantes:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{dk}{dx_1},\quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{dk}{dx_2},\quad \ldots\quad \frac{d^2z_3}{dt^2}=\frac{dk}{dz_3},$$

où

$$k=V+\frac{2\sigma}{ABC}k,\qquad V=2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{1}{\triangle}ds.$$

De la forme de ces équations différentielles et de celle des quantités $\triangle$, k on conclut immédiatement qu'à une solution du problème représentée au moyen des équations:

$$x = lx_0 + my_0 + nz_0 = \frac{x_1}{A}x_0 + \frac{y_1}{B}y_0 + \frac{z_1}{C}z_0,$$

$$y = l'x_0 + m'y_0 + n'z_0 = \frac{x_2}{A}x_0 + \frac{y_2}{B}y_0 + \frac{z_2}{C}z_0,$$

$$z = l''x_0 + m''y_0 + n''z_0 = \frac{x_3}{A}x_0 + \frac{y_3}{B}y_0 + \frac{z_3}{C}z_0$$

correspondra une seconde solution représentée par les équations:

$$X = \frac{x_1}{A}x_0 + \frac{x_2}{B}y_0 + \frac{x_3}{C}z_0 = lx_0 + \frac{A}{B}l'y_0 + \frac{A}{C}l''z_0,$$

$$Y = \frac{y_1}{A}x_0 + \frac{y_2}{B}y_0 + \frac{y_3}{C}z_0 = \frac{B}{A}mx_0 + m'y_0 + \frac{B}{C}m''z_0,$$

$$Z = \frac{z_1}{A}x_0 + \frac{z_2}{B}y_0 + \frac{z_3}{C}z_0 = \frac{C}{A}nx_0 + \frac{C}{B}n'y_0 + n''z_0,$$

ce qui constitue le beau théorème de M. *Dedekind.*

Pavie, Novembre 1860.

Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *S. Cohn.*)

Zwei bekannte Kartenprojectionen, die *stereographische* und *Mercatorsche* haben die Eigenschaft, dass sich alle Linien in der Projection unter denselben Winkeln wie auf der Kugel schneiden. *Lambert* wurde hierdurch auf die Frage geführt, allgemein die Projectionsarten zu suchen, welche diese Eigenschaft haben. Er hat dieselbe in einer sehr lehrreichen Abhandlung: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* S. 105—199 im dritten Theil seiner mathematischen Beiträge gelöst, und sie auch auf das *abgeplattete Erdsphäroid* ausgedehnt. *Lagrange* hat hiervon Gelegenheit genommen, für *alle Umdrehungsflächen* die betreffende Differentialgleichung aufzustellen und auf die allgemeinste Art zu integriren. Endlich hat *Gauss* in einer von der Kopenhagner Academie gekrönten Abhandlung S. 5—30 im dritten Heft von *Schumachers Astronomischen Abhandlungen* die Differentialgleichung aufgestellt, auf welche die Aufgabe für beliebige Flächen führt, auch dieselbe für *die* speciellen Flächen zweiter Ordnung integrirt, die zugleich Umdrehungsflächen, Kegel oder Cylinder sind, für welche Flächen, wie man leicht sieht, diese Integration allgemein ausgeführt werden kann. Die Integration für *beliebige* Flächen zweiter Ordnung kann jedoch, wie ich bereits vor längerer Zeit in einer vor der Berliner Academie gelesenen Note bemerkt habe, mittelst Einführung der sogenannten *elliptischen Coordinaten* auf Quadraturen zurückgeführt werden. Ich will im Folgenden die hierauf bezüglichen Formeln näher entwickeln.

*) In der hier vorliegenden Abhandlung hat *Jacobi* diejenige Anwendung der elliptischen Coordinaten auf das Problem der Kartenprojection vollständig durchgeführt, von welcher er im Jahre 1839 (Monatsbericht der Berliner Academie 1839, S. 64 und Bd. 19, S. 311 dieses Journals) die erste Andeutung gegeben hatte.

Nachdem 1857 die philosophische Facultät der Göttinger Universität diese Durchführung unter Bezugnahme auf die *Jacobi*sche Andeutung zum Gegenstand einer Preisfrage gemacht hatte, wurde von Herrn *Ernst Schering* eine Lösung geliefert, welche 1858 als gekrönte Preisschrift erschienen ist.

Es sei die Fläche dadurch bestimmt, dass die drei rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte, x, y, z als Functionen zweier Grössen t und u gegeben sind. Es sei das Quadrat eines Linienelementes der Fläche gegeben,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T dt^2+2U dt du+V du^2,$$

so hat man den Satz, *dass die Grössen T, U, V hinreichen, das Elementardreieck zu bestimmen, welches von drei unendlich nahen Punkten der Fläche gebildet wird, die den Grössen t, u; $t+\tau$, $u+v$; $t+\tau'$, $u+v'$ entsprechen, wo τ, τ' unendlich kleine Incremente von t, und v, v' unendlich kleine Incremente von u bedeuten.*

Es seien nämlich A, B, C respective die drei Punkte der Fläche, so werden ihre Coordinaten

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}v, & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}v, & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}v, \\ x+\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}v', & y+\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}v', & z+\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}v', \end{array}$$

wo nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 &= T, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u} &= U, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= V. \end{aligned}$$

Es wird hiernach

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= T\tau^2+2U\tau v+Vv^2, \\ \overline{AC}^2 &= T\tau'^2+2U\tau'v'+Vv'^2, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} AB.AC.\cos BAC &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau+\frac{\partial x}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\tau'+\frac{\partial x}{\partial u}v'\right) \\ &+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau+\frac{\partial y}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\tau'+\frac{\partial y}{\partial u}v'\right) \\ &+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau+\frac{\partial z}{\partial u}v\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\tau'+\frac{\partial z}{\partial u}v'\right) \\ &= T\tau\tau'+U(\tau v'+\tau' v)+Vvv', \end{aligned}$$

wie man auch leicht aus der Formel

$$\overline{BC}^2 = T(\tau-\tau')^2+2U(\tau-\tau')(v-v')+V(v-v')^2$$

findet. Es wird auch

$$\overline{AB}^2.\overline{AC}^2\sin^2 BAC = 4(\triangle ABC)^2 = (TV-U^2)(\tau v'-\tau' v)^2,$$

welches die aus der Theorie der *Multiplication der quadratischen Formen* bekannte Gleichung

$$(T\tau^2+2U\tau v+Vv^2)(T\tau'^2+2U\tau' v'+Vv'^2)$$
$$= (T\tau\tau'+2U(\tau v'+\tau' v)+Vvv')^2+(TV-U^2)(\tau v'-\tau' v)^2$$

giebt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass, wenn für eine andere Fläche x, y, z andere Functionen von t und u bedeuten, und *entsprechende Punkte* diejenigen Punkte der beiden Flächen genannt werden, welche denselben Werthen der Grössen t und u zugehören, die kleinsten einander entsprechenden Theile der beiden Flächen einander ähnlich sind, wenn die drei Functionen T, U, V proportional bleiben.

Bei Auflösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche so auf einer anderen gegebenen Fläche abzubilden, dass die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben, genügt es, wenn man für die eine Fläche *eine Ebene* nimmt, welche die Vermittlung zwischen den beiden Flächen übernimmt. Denn kann man unter der gegebenen Bedingung jede Fläche auf einer Ebene und die Ebene auf jeder Fläche abbilden, so kann man unter derselben Bedingung auch jede Fläche auf jeder anderen abbilden. Man wird ferner die Aufgabe in ihrer ganzen Vollständigkeit lösen können, wenn man alle Correlationssysteme der Ebene selbst findet, die so beschaffen sind, dass die kleinsten Theile einander ähnlich werden, oder auf alle möglichen Arten unter der angegebenen Bedingung die Ebene auf sich selber abbilden kann.

Es seien p und q die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene, so sind p und q als solche Functionen von t und u zu bestimmen, dass

$$dp^2+dq^2 = M(Tdt^2+2Udtdu+Vdu^2)$$

oder

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 = MT, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = MV,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial u} = MU,$$

wo $\sqrt{M}$ die Grösse ist, mit welcher man die dem Punkte, dessen Coordinaten p und q sind, benachbarten Linienelemente der Ebene multipliciren muss, um die entsprechenden Linienelemente der gegebenen Fläche zu erhalten.

Da die Elemente dt und du gänzlich von einander unabhängig und $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ lineare Functionen derselben sind, so kann man die Ausdrücke

$$dp+dq\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad dp-dq\sqrt{-1}$$

definiren als lineare Factoren des quadratischen Ausdrucks $Tdt^2+2Udt\,du+Vdu^2$, welche zugleich vollständige Differentiale sind. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man $dp+dq\sqrt{-1}$ und $dp-dq\sqrt{-1}$ noch mit beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ multiplicirt. *Um daher p und q auf die allgemeinste Art als Functionen von t und u zu finden, zerfälle man den gegebenen Ausdruck des Quadrats des Linienelementes*

$$Tdt^2+2Udt\,du+Vdu^2$$

in seine linearen Factoren, multiplicire jeden derselben mit solcher Function von t und u, dass er ein vollständiges Differential wird, und setze die beiden Integrale beliebigen Functionen respective von $p+q\sqrt{-1}$ *und von* $p-q\sqrt{-1}$ *gleich.*

Ich will als Beispiele die drei Fälle betrachten, in welchen die Fläche durch Umdrehung erzeugt oder ein Kegel oder ein Cylinder ist, und dann zu der Aufgabe übergehen, ein dreiaxiges Ellipsoid auf einer Fläche abzubilden.

I.

Abbildung von Umdrehungsflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \quad y = t\sin u, \quad z = F(t),$$

wie man für eine Umdrehungsfläche annehmen kann. Es wird dann das Quadrat des Linienelementes

$$Tdt^2+t^2du^2,$$

wo

$$T = 1+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Es werden hier

$$\frac{\sqrt{T}dt}{t}+du\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{T}dt}{t}-du\sqrt{-1}$$

die integrablen Factoren, und daher

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \mathrm{T}+u\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \mathrm{T}-u\sqrt{-1},$$

wo $\mathrm{T}=\int\frac{\sqrt{T}dt}{t}$, die allgemeinsten Gleichungen, welche zwischen p, q und

t, u Statt finden können. Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \mathrm{T}, \quad q = u,$$

und es wird t der Quotient des Linienelementes der Fläche und der Ebene.

Es bedeutet in diesen Formeln die z-Axe die Umdrehungsaxe, t den Halbmesser des Parallelkreises, u die Länge. Man erhält daher die der *Mercatorschen* entsprechende Projectionsart, in welcher die durch die einzelnen Längengrade gehenden Meridiane durch äquidistante Parallellinien abgebildet werden, während die darauf senkrecht stehenden geraden Linien dem Aequator und den Parallelkreisen entsprechen. Setzt man dagegen

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man, wenn

$$p = r\cos\varphi, \quad q = r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$\log r = \mathrm{T}, \quad \varphi = u,$$

und es werden sich die entsprechenden Linienelemente der Projection und der Fläche, wie der Radiusvector und der Halbmesser des Parallelkreises verhalten. Diese Projectionsart entspricht der *stereographischen*, weil in ihr die Meridiankreise durch gerade Linien dargestellt werden, die von einem Punkt ausgehen, der Aequator und die Parallelkreise dagegen durch Kreise, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt haben. Die Curven, welche auf der Umdrehungsfläche alle Meridiane unter demselben Winkel schneiden, werden in der ersten Projection gerade Linien, in der zweiten eine Art Spiralen, deren Polargleichung

$$\alpha + \beta r + \gamma\varphi = 0$$

ist. *Lambert* hat noch den Fall betrachtet, wenn

$$f(x) = \varphi(x) = x^m,$$

und Werthe von m angegeben, für welche die Formeln eine practische Anwendung für gewisse specielle Zwecke finden, die man durch die Projection zu erreichen wünschen kann.

II.

Abbildung von Kegelflächen auf einer Ebene.

Es sei

$$x = t\cos u, \quad y = t\sin u\cos v, \quad z = t\sin u\sin v,$$

wo v eine Function bloss von u bedeute, so wird die Fläche ein Kegel, dessen

Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Es wird hiernach

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dt^2+t^2A\,du^2,$$

wo

$$A = 1+\sin^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

eine Function bloss von u ist. Es werden daher die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Kegels

$$\frac{dt}{t}+\sqrt{-A}\,du,\qquad \frac{dt}{t}-\sqrt{-A}\,du,$$

und daher die gesuchten Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form, wenn man

$$\int\sqrt{A}\,du = \int\sqrt{(du^2+\sin^2 u\,dv^2)} = \sigma$$

setzt,

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \log t+\sigma\sqrt{-1},$$
$$\varphi(p-q\sqrt{-1}) = \log t-\sigma\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = \log x,$$

so erhält man

$$p = t\cos\sigma,\qquad q = t\sin\sigma$$

und daher *diejenige* Abbildung des Kegels, welche seine Abwicklung ergiebt.

III.

Abbildung von cylindrischen Flächen auf einer Ebene.

Wenn y eine Function bloss von x, und z von x und y unabhängig ist, erhält man eine cylindrische Fläche. Man kann daher

$$x = t,\quad y = F(t),\quad z = u$$

setzen, woraus

$$dx^2+dy^2+dz^2 = T\,dt^2+du^2$$

folgt, wo

$$T = 1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

eine Function bloss von t ist. Die beiden integrablen Factoren des Quadrates des Linienelementes des Cylinders werden

$$\sqrt{T}\,dt+du\sqrt{-1},\qquad \sqrt{T}\,dt-du\sqrt{-1}.$$

Setzt man daher

$$\int\sqrt{T}\,dt = \int\sqrt{dx^2+dy^2} = \sigma,$$

wo σ den Bogen eines zur Kante des Cylinders senkrechten Schnitts oder des

Schnitts der xy-Ebene bedeutet, so werden die verlangten Gleichungen:

$$f(p+q\sqrt{-1}) = \sigma + z\sqrt{-1}, \quad \varphi(p-q\sqrt{-1}) = \sigma - z\sqrt{-1}.$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi(x) = x,$$

so erhält man

$$p = \sigma, \quad q = z = u,$$

und daher wieder diejenige Abbildung, die durch die Abwicklung des Cylinders gegeben wird.

Abbildung eines Ellipsoids und der beiden Hyperboloide auf einer Ebene.

Es seien b und c gegebene positive Constanten und c die grössere derselben; es seien ferner ϱ, ϱ_1, ϱ_2 drei Grössen, von denen die erste grösser als c, die dritte kleiner als b und die zweite zwischen b und c liegt; so werden

$$1 = \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2-b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2-c^2},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2-b^2} + \frac{z^2}{\varrho_1^2-c},$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2-b^2} + \frac{z^2}{\varrho_2^2-c^2}$$

die Gleichungen eines Ellipsoids, eines einflächigen und eines zweiflächigen Hyperboloids. Betrachtet man x, y, z als Functionen von ϱ, ϱ_1, ϱ_2, wie sie durch die vorstehenden Gleichungen gegeben werden, so findet man, wie bekannt ist,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}d\varrho^2 + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2)}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}d\varrho_1^2 + \frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}d\varrho_2^2.$$

Betrachtet man nach einander erstens ϱ, zweitens ϱ_1, drittens ϱ_2 als constant, so giebt der vorstehende Ausdruck die Quadrate der Linienelemente der drei genannten Flächen:

1) *für das Ellipsoid* (ϱ constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)} + \frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

2) *für das einflächige Hyperboloid* (ϱ_1 constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\varrho^2-\varrho_2^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)d\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\};$$

3) *für das zweiflächige Hyperboloid* (ϱ_2 constant)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\varrho^2-\varrho_1^2)\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_2^2)d\varrho^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}.$$

Die linearen integrablen Factoren dieser Ausdrücke werden:

$$1)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1 \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2\sqrt{-1};$$

$$2)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}\,d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2\sqrt{-1};$$

$$3)\quad \sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right\}}\,d\varrho \pm \sqrt{\left\{\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1\sqrt{-1},$$

und man erhält in jedem der drei Fälle die allgemeinste Auflösung der Aufgabe, wenn man die Integrale der beiden dem Doppelzeichen $\pm$ entsprechenden Ausdrücke respective einer willkürlichen Function von $p+q\sqrt{-1}$ und einer willkürlichen Function von $p-q\sqrt{-1}$ gleich setzt.

Abbildung eines Ellipsoids auf einer Ebene.

$$\varrho > c > \varrho_1 > b > \varrho_2.$$

$$U = \int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_1^2}{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}\right\}}\,d\varrho_1,\qquad V = \int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-\varrho_2^2}{(b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2)}\right\}}\,d\varrho_2.$$

1) In U ist ϱ_1 variabel, ϱ constant. Man setze

$$\varrho_1^2-b^2 = y^2(c^2-\varrho_1^2)\quad\text{oder}\quad \varrho_1^2(1+y^2) = b^2+c^2y^2,$$

so wird

$$\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\{(\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)\}}} = \frac{dy}{\sqrt{\{(1+y^2)(b^2+c^2y^2)\}}},$$

$$\varrho^2-\varrho_1^2 = \frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{1+y^2},$$

und daher

$$U = \int\sqrt{\left\{\frac{\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2}{b^2+c^2y^2}\right\}}\frac{dy}{1+y^2}.$$

Es sei

$$y = \frac{b}{c}\operatorname{tg}\varphi,$$

so wird

$$\varrho^2-b^2+(\varrho^2-c^2)y^2 = \frac{(\varrho^2-b^2)c^2-\varrho^2(c^2-b^2)\sin^2\varphi}{c^2\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{(b^2+c^2y^2)}} = \frac{c\cos\varphi\, d\varphi}{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\varphi},$$

und daher, wenn man

$$\frac{\varrho^2(c^2-b^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)} = k^2,\qquad \frac{c^2-b^2}{c^2} = k^2\sin^2\alpha$$

setzt,

$$U = \frac{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}{c}\int\frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

oder da

$$\frac{\varrho^2-b^2}{\varrho^2} = \sin^2\alpha,\quad \frac{b^2}{\varrho^2} = \cos^2\alpha,\quad \frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha$$

wird,

$$U = \frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int\frac{\Delta\varphi\,d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\,\Delta\alpha\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\alpha\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Setzt man

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u,\quad \int\frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = a,$$

so wird, nach den von mir in den Fundamentis eingeführten Bezeichnungen,

$$U = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\Delta\operatorname{am}(a).u - \Pi(u, a)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{2hu}.\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)},$$

wenn man

$$h = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a)\Delta\operatorname{am}(a) - Z(a)$$

$$= -\frac{d\log.\Theta(a)\cos\operatorname{am}(a)}{da} = -\frac{d\log H(a+K)}{da}$$

setzt. Wenn

$$u = \frac{2K}{\pi}u',\quad a = \frac{2K}{\pi}a',\quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so wird

$$\Theta(u) = 1-2q\cos 2u'+2q^4\cos 4u'-2q^9\cos 6u'+\cdots,$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\{\sin u'-q^2\sin 3u'+q^6\sin 5u'-q^{12}\sin 7u'+\cdots\},$$

und daher

$$\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{1-2q\cos 2(u'+a')+2q^4\cos 4(u'+a')-\cdots}{1-2q\cos 2(u'-a')+2q^4\cos 4(u'-a')-\cdots},$$

$$H(a+K) = 2\sqrt[4]{q}\{\cos a'+q^2\cos 3a'+q^6\cos 5a'+\cdots\},$$

und daher

$$h = -\frac{d\log H(a+K)}{\frac{2K}{\pi}da'} = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\sin a'+3q^2\sin 3a'+5q^6\sin 5a'+\cdots}{\cos a'+q^2\cos 3a'+\ q^6\cos 5a'+\cdots}.$$

Ich bemerke noch, dass

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(u) = \frac{c^2(\varrho_1^2-b^2)}{b^2(c^2-\varrho_1^2)},$$

und daher

$$\cos^2\varphi = \frac{b^2(c^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{c^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(c^2-b^2)},$$

$$k^2\sin^2\varphi = \frac{\varrho^2(\varrho_1^2-b^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}, \qquad \Delta^2\varphi = \frac{b^2(\varrho^2-\varrho_1^2)}{\varrho_1^2(\varrho^2-b^2)}.$$

Man sieht, dass $\frac{1}{k^2}$ und $\sin^2\varphi$ dieselben Functionen respective von ϱ und ϱ_1 sind. Wenn ϱ_1 von b bis c wächst, wachsen φ und u' von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und u von 0 bis K.

2) Man erhält $V\sqrt{-1}$ aus U, wenn man ϱ_1 in ϱ_2 verwandelt. Hierdurch bleiben die Constanten k, α, a, a', h unverändert, und es wird nur u verändert, und zwar nimmt es, weil ϱ_2 immer kleiner als b bleiben soll, einen imaginären Werth an, welchen ich mit $(K'+v)\sqrt{-1}$ bezeichnen werde. Man wird dann die betreffenden Formeln erhalten, wenn man in den zuletzt aufgestellten $(K'+v)\sqrt{-1}$ für u und daher $\operatorname{am}((K'+v)\sqrt{-1})$ für φ und gleichzeitig ϱ_2 für ϱ_1 setzt. Man erhält hieraus

$$\frac{-1}{k^2\sin^2\operatorname{am}((K'+v)\sqrt{-1})} = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}$$

oder

$$-\sin^2\operatorname{am}(v\sqrt{-1}) = \operatorname{tg}^2\operatorname{am}(v, k') = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)},$$

woraus, wenn man $\operatorname{am}(v, k') = \psi$ setzt,

$$\cos^2\psi = \frac{\varrho^2(b^2-\varrho_2^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-b^2)}{b^2(\varrho^2-\varrho_2^2)},$$

und, da $k'^2 = \frac{b^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-b^2)}$, auch

$$k'^2\sin^2\psi = \frac{\varrho_2^2(\varrho^2-c^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}, \qquad \Delta^2(\psi, k') = \frac{\varrho^2(c^2-\varrho_2^2)}{c^2(\varrho^2-\varrho_2^2)}$$

folgt. Es wird ferner

$$V = h(K'+v) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}+a)}{\Theta(K'\sqrt{-1}+v\sqrt{-1}-a)}.$$

Da

$$\Theta(K'\sqrt{-1}+u) = \sqrt{-1}\,.\,e^{\frac{\pi(K'-2u\sqrt{-1})}{4K}}H(u),$$

so wird dieser Ausdruck, wenn man, wie verstattet ist, den durch Addition hinzugekommenen constanten Term fortlässt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{H(a+v\sqrt{-1})}{H(a-v\sqrt{-1})}$$
$$= hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'}) - q^2 \cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'}) - q^2 \sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'}) + \cdots},$$

wo $v' = \frac{\pi v}{2K}$.

Wenn ϱ_2 von 0 bis b zunimmt, wächst gleichzeitig v von 0 bis K' und $e^{v'}$ von 1 bis $\frac{1}{\sqrt{q}}$.

Will man bei Erhaltung der Aehnlichkeit der kleinsten Theile das Ellipsoid so auf einer Ebene abbilden, dass seine Krümmungslinien, welche Durchschnitte mit confocalen *zwei*flächigen Hyperboloiden sind, *gerade Linien*, die aus einem festen Punkte ausgehen, die Krümmungslinien dagegen, welche Durchschnitte mit confocalen *ein*flächigen Hyperboloiden sind, *Kreise* werden, die den festen Punkt zum Mittelpunkt haben, so findet man aus jedem gegebenen Punkte des Ellipsoids mittelst der obigen Formeln die Abscissen und Ordinaten $r\cos\eta$ und $r\sin\eta$ des entsprechenden Punktes der Ebene. Ist nämlich der feste Punkt der Anfangspunkt der Polarcoordinaten, so werden dieselben,

$$r = e^{hu} \sqrt{\left\{ \frac{1-2q\cos 2(u'+a') + 2q^4 \cos 4(u'+a') - \cdots}{1-2q\cos 2(u'-a') + 2q^4 \cos 4(u'-a') - \cdots} \right\}},$$

$$\eta = hv + \operatorname{Arctg} \frac{\cos a'(e^{v'}-e^{-v'}) - q^2 \cos 3a'(e^{3v'}-e^{-3v'}) + \cdots}{\sin a'(e^{v'}+e^{-v'}) - q^2 \sin 3a'(e^{3v'}+e^{-3v'}) + \cdots}.$$

Dem durch diese Polarcoordinaten bestimmten Punkte der Ebene entsprechen Punkte des Ellipsoids, deren Coordinaten

$$x = \frac{\varrho\varrho_1\varrho_2}{bc},$$
$$y = \sqrt{\left\{ \frac{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2)}{b^2(c^2-b^2)} \right\}},$$
$$z = \sqrt{\left\{ \frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2)}{c^2(c^2-b^2)} \right\}}$$

sind.

Es ist zufolge der obigen Substitutionen, wenn man $\psi = \operatorname{am}(v, k')$ setzt,

$$\varrho_1^2 = \frac{b^2}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad \varrho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\psi}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\psi},$$

$$\varrho_1^2 - b^2 = \frac{b^2k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad b^2 - \varrho_2^2 = \frac{b^2\sin^2\alpha\cos^2\psi}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\psi},$$

$$c^2 - \varrho_1^2 = \frac{c^2k^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}, \qquad c^2 - \varrho_2^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha\,\Delta^2(\psi, k')}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\psi}.$$

Fügt man hiezu die Formeln

$$\frac{b^2}{c^2} = \Delta^2\alpha, \qquad \frac{b^2(\varrho^2-b^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2\Delta^2\alpha}{k^2}, \qquad \frac{c^2(\varrho^2-c^2)}{c^2-b^2} = \frac{\varrho^2 k'^2}{k^2\Delta^2\alpha},$$

so erhält man

$$x = N.\Delta^2\alpha\sin\psi, \quad y = N.\Delta^2\alpha\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.k'\sin^2\alpha\cos\varphi\Delta(\psi, k'),$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\Delta\alpha\sqrt{\{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)\}}}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids selber wird

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2\sin^2\alpha}+\frac{z^2\Delta^2\alpha}{\varrho^2 k'^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Für das *längliche Umdrehungsellipsoid* wird

$$b=c, \quad k^2=0, \quad q=0, \quad K=\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\varphi = u = u', \quad \alpha = a = a', \quad h = \operatorname{tg}\alpha.$$

Man hat ferner

$$v = v' = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos\psi} = \log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi), \qquad \frac{e^{v'}-e^{-v'}}{e^{v'}+e^{-v'}} = \sin\psi.$$

Man erhält daher aus dem ersten System Formeln die Polarcoordinaten eines Punktes der Ebene

$$r = e^{\operatorname{tg}\alpha.\varphi},$$

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha\log\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi)+\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\operatorname{cotg}\alpha\sin\psi,$$

und die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes des länglichen Umdrehungsellipsoids

$$x = N.\sin\psi, \quad y = N.\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad z = N.\sin^2\alpha\cos\varphi\cos\psi,$$

wo

$$N = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\psi)}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\sin^2\psi+\sin^2\alpha\cos^2\psi)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2+z^2}{\varrho^2\sin^2\alpha} = 1.$$

Wenn das Ellipsoid sich einem *abgeplatteten Umdrehungsellipsoid* annähert, oder b eine kleine Grösse ist, wodurch k sich der Einheit nähert, muss man die vorstehenden Formeln wie folgt transformiren.

Ich führe zuerst für u und a ihre Complemente

$$K-u = u_1, \qquad K-a = a_1$$

ein. Setzt man

$$\operatorname{am}(u_1) = \varphi_1, \qquad \operatorname{am}(a_1) = \alpha_1,$$

so wird

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{c^2}{\varrho^2}, \qquad \cos^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2-c^2}{\varrho^2}, \qquad \Delta^2\alpha_1 = \frac{\varrho^2-c^2}{\varrho^2-b^2},$$

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2)}{(c^2-b^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)}, \quad \cos^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2-c^2)(\varrho_1^2-b^2)}{(c^2-b^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)}, \quad \Delta^2\varphi_1 = \frac{(\varrho^2-c^2)\varrho_1^2}{c^2(\varrho^2-\varrho_1^2)},$$

und die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta^2\alpha_1 . y^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} + \frac{z^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} = 1,$$

und es wird nach einigen leichten Reductionen

$$x = M.\Delta^2\alpha_1\Delta\varphi_1\sin\psi, \quad y = M.\cos^2\alpha_1\cos\varphi_1\cos\psi, \quad z = M.\cos^2\alpha_1\Delta^2\alpha_1\sin\varphi_1\Delta(\psi,k'),$$

wo

$$M = \frac{\varrho}{\Delta\alpha_1\sqrt{\{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)(\cos^2\alpha_1+k'^2\sin^2\alpha_1\sin^2\psi)\}}}.$$

Man hat ferner

$$hu = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}(K-u_1), \qquad \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)} = \frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)},$$

und daher, wenn man in dem Ausdrucke von U die Constante $\frac{K d\log H(a_1)}{da_1}$ fortlässt und die Zeichen umkehrt,

$$U = \frac{d\log H(a_1)}{da_1}u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)}.$$

Es wird ferner

$$U = \frac{\sin\alpha\Delta\alpha}{\cos\alpha}\int_0^{\varphi}\frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi} = \frac{k'^2\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(\Delta^2\alpha_1\Delta^2\varphi_1 - k^2\cos^2\alpha_1\cos^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_{\varphi_1}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}.$$

Da es frei steht von U eine Constante abzuziehen und das Zeichen zu ändern, so werde ich hiefür

$$U = \frac{\cos\alpha_1\Delta\alpha_1}{\sin\alpha_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1}$$

setzen.

Diese Ausdrücke können in andere transformirt werden, in welchen die Argumente imaginär werden, und der Modul in sein Complement sich

verwandelt. Es ist aber

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}} H(K' \pm u\sqrt{-1}, k'),$$

$$H(u) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{\pi uu}{4KK'}} H(u\sqrt{-1}, k'),$$

und daher

$$h = \frac{d\log H(a_1)}{da_1} = -\frac{\pi a_1}{2KK'} + h_1,$$

wenn man

$$h_1 = \frac{d\log H(a_1\sqrt{-1}, k')}{da_1} = \frac{\pi}{2K'}\cdot\frac{e^{a_1'}+e^{-a_1'}-3q'^2\left(e^{3a_1'}+e^{-3a_1'}\right)+\cdots}{e^{a_1'}-e^{-a_1'}-q'^2\left(e^{3a_1'}-e^{-3a_1'}\right)+\cdots}$$

setzt. Es wird ferner

$$U = \frac{\cos a_1 \Delta a_1}{\sin a_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{(1-k^2\sin^2 a_1\sin^2\varphi_1)\Delta\varphi_1} = hu_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1+a_1)}{\Theta(u_1-a_1)}$$

$$= h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{H(K'-(u_1+a_1)\sqrt{-1}, k')}{H(K'-(u_1-a_1)\sqrt{-1}, k')}$$

oder, wenn man $u_1' = \frac{\pi u_1}{2K'}$, $a_1' = \frac{\pi a_1}{2K'}$ setzt,

$$U = h_1u_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{u_1'+a_1'}+e^{-u_1'-a_1'}+q'^2\left(e^{3u_1'+3a_1'}+e^{-3u_1'-3a_1'}\right)+\cdots}{e^{u_1'-a_1'}+e^{-u_1'+a_1'}+q'^2\left(e^{3u_1'-3a_1'}+e^{-3u_1'+3a_1'}\right)+\cdots}.$$

Wenn $\varphi_1 = 0$, wird $u_1 = 0$, wofür dieser Ausdruck von U, wie der obige Integralausdruck verschwindet, weshalb beide einander gleich gesetzt worden sind.

Man hat ferner, wenn man

$$v' = \frac{\pi v}{2K'}$$

setzt,

$$V = hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{H(a+v\sqrt{-1})}{H(a-v\sqrt{-1})}$$

$$= hv + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{H(K-a_1+v\sqrt{-1})}{H(K-a_1-v\sqrt{-1})}$$

$$= h_1v + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\Theta(v+a_1\sqrt{-1}, k')}{\Theta(v-a_1\sqrt{-1}, k')}$$

$$= h_1v + \operatorname{Arctg}\frac{q'\left(e^{2a_1'}-e^{-2a_1'}\right)\sin 2v' - q'^4\left(e^{4a_1'}-e^{-4a_1'}\right)\sin 4v' + \cdots}{1-q'\left(e^{2a_1'}+e^{-2a_1'}\right)\cos 2v' + q'^4\left(e^{4a_1'}+e^{-4a_1'}\right)\cos 4v' - \cdots}.$$

Für das abgeplattete Umdrehungsellipsoid selbst wird

$$k' = 0, \quad q' = 0, \quad K' = \tfrac{1}{2}\pi, \quad v = v' = \psi,$$
$$a_1' = a_1 = \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha_1), \quad u_1' = u_1 = \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1),$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1) + \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)}{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1) - \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)} \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1)$$
$$- \tfrac{1}{2}\log \frac{\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)}{\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1) + \operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\alpha_1)\operatorname{cotg}(45^0 + \frac{1}{2}\varphi_1)}$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1 + \alpha_1) + \sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha_1)}$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha_1}\log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi_1) - \tfrac{1}{2}\log\frac{1 + \sin\alpha_1\sin\varphi_1}{1 - \sin\alpha_1\sin\varphi_1},$$

$$V = \frac{\psi}{\sin\alpha_1}.$$

Die Coordinaten der Punkte des Umdrehungsellipsoids werden, wenn man $M = L\cos^2\alpha_1$ setzt,

$$x = L.\cos\varphi_1\sin\psi, \quad y = L.\cos\varphi_1\cos\psi, \quad z = L.\cos^2\alpha_1\sin\varphi_1,$$

wo

$$L = \frac{\varrho}{\sqrt{(1 - \sin^2\alpha_1\sin^2\varphi_1)}},$$

und die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2 + y^2}{\varrho^2} + \frac{z^2}{\varrho^2\cos^2\alpha_1} = 1.$$

Der Winkel ψ ist hier die Länge und der Winkel φ_1 die excentrische Anomalie des Meridians. —

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln.

(Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg.)

Poisson hat das Problem, die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln zu finden, in zwei berühmten Arbeiten *) behandelt und *Plana* hat die von *Poisson* dort gegebenen Formeln weiter entwickelt **). Man kann das Problem als aus zwei Theilen bestehend betrachten; in dem ersten ist eine Function zu ermitteln, die *Poisson* durch $f(x)$ bezeichnet, und die das Potential der auf der einen Kugel verbreiteten Elektricität für alle Punkte der Centrallinie angiebt, in dem zweiten ist aus diesem $f(x)$ eine Function zu bilden, die *Poisson* $\varphi(\mu, x)$ nennt, die das Potential derselben Elektricität für Punkte ausserhalb der Centrallinie darstellt, und aus der mit Leichtigkeit die Dichtigkeit der Elektricität in allen Punkten der Kugel ermittelt werden kann. Zur Berechnung derjenigen Grössen, welche den Physiker zunächst interessiren, genügt aber die Kenntniss jener Function $f(x)$; es ist nämlich, wenn der Radius der Kugel $=1$ gesetzt wird, $f(0)$ die ganze Elektricitätsmenge, welche auf der Kugel sich befindet, es giebt ferner der Ausdruck $\frac{1}{4\pi}\left(f(x)+2x\frac{df(x)}{dx}\right)$, wenn in ihm $x=1$ oder $=-1$ gesetzt wird, die Dichtigkeit der Elektricität in dem einen oder dem anderen der beiden Punkte der Kugel an, welche in der Centrallinie liegen; und auch die Kraft, mit der die beiden Kugeln einander anziehen oder abstossen, lässt sich durch $f(x)$ ausdrücken. Die Betrachtungen, welche im Folgenden auseinandergesetzt werden sollen, beziehen sich nur auf diese Function $f(x)$. *Poisson* hat für dieselbe eine Reihe gefunden, welche immer convergirt, und zwar um so schneller, je grösser der Abstand der beiden Kugeln ist. Dieselbe Reihe habe ich auf einem Wege abgeleitet, der mir den Vorzug vor dem von *Poisson* benutzten zu verdienen scheint. Die Reihe hat Aehnlichkeit mit gewissen Reihen, die in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommen; ich habe

---

*) Mém. de la classe des sc. math. et ph. de l'Institut imperial de France, année 1811, première et seconde partie.

**) Memorie della reale accademia delle scienze di Torino. tomo VII, 1845.

bemerkt, dass einige von $f(x)$ abhängige Grössen sich durch elliptische Functionen in geschlossenen Ausdrücken darstellen lassen. Zu diesen gehört die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der auf der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt, für den Fall, dass das Gesammt-Potential in beiden Kugeln denselben Werth hat. In den Abhandlungen von *Poisson* und von *Plana* finden sich zwei verschiedene Ausdrücke für den Werth, den diese Dichtigkeit annimmt, wenn der Abstand der beiden Kugeln unendlich klein ist und ihre Radien gleich sind. *Poisson* giebt dieselbe als von der Ordnung von δ^4, *Plana* als von der Ordnung von δ^6 an, wo δ eine gewisse negative Grösse bezeichnet, deren Quadrat von der Ordnung des Abstandes der Kugeln ist. Der Ausdruck durch elliptische Functionen zeigt, dass die in Rede stehende Dichtigkeit von der Ordnung von

$$\frac{1}{\delta^3} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}$$

ist.

Die erwähnten Resultate und andere, die sich auf den Fall beziehen, dass die beiden Kugeln einander sehr nahe stehen, sind von *Poisson* und *Plana* aus einer Reihe für $f(x)$ abgeleitet, die nach aufsteigenden Potenzen von δ fortschreitet. Diese Reihe ist aus der ursprünglichen, immer convergirenden, Reihe für $f(x)$ dadurch gebildet, dass die letztere in ein bestimmtes Integral verwandelt und dieses nach aufsteigenden Potenzen von δ entwickelt ist. Es sind indessen nur die ersten Glieder der Reihe berechnet, das allgemeine Glied derselben ist nicht aufgestellt, es konnte daher auch nicht untersucht werden, ob sie convergirt, und welche Bedeutung sie hat, wenn sie nicht convergirt. Bei ihrer Ableitung ist in einem Integral von der Form

$$\int_0^\infty \frac{\sin \delta t \, dt}{(e^{\pi t}-1)(1+\alpha \sin^2 \delta t)}$$

für

$$\frac{1}{1+\alpha \sin^2 \delta t}$$

die Entwickelung dieses Ausdrucks nach aufsteigenden Potenzen von t gesetzt, eine Entwickelung, welche nicht für alle Werthe von t, über welche zu integriren ist, convergirt; es hätte einer besonderen Untersuchung bedurft, in wiefern diese Entwickelung benutzt werden darf; eine solche ist nicht geführt. Ich habe daher auf einem anderen, als dem von *Poisson* eingeschlagenen Wege eine Reihe abzuleiten gesucht, die bei kleinem Abstande der Kugeln den Werth

von $f(x)$ angiebt. Ich bin so zu einer Reihe gelangt, die auch nach aufsteigenden Potenzen von δ fortschreitet, bei der aber die Coefficienten dieser Potenzen noch von δ abhängen; das allgemeine Glied der Reihe lässt sich mit Leichtigkeit angeben; sie ist nur eine semiconvergente, doch erlaubt sie $f(x)$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zu berechnen, wenn man eine gewisse Transformationsgleichung zu Hülfe zieht, die für $f(x)$ gilt; ohne Zuziehung dieser giebt sie in dem Falle, dass der Abstand der Kugeln unendlich klein ist, den Werth von $f(x)$ genau bis auf eine unendlich kleine Grösse.

1.

Es sei a der Radius der ersten, b der der zweiten Kugel, c die Entfernung ihrer Mittelpunkte, die grösser als $a+b$ vorausgesetzt wird, h das Potential aller freien Elektricität in der ersten, g das in der zweiten Kugel. Weiter sei $f(x)$ das Potential der auf der ersten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb dieser Kugel, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der ersten Kugel liegt. Dann ist:

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+x^2-2ax\cos\vartheta}},$$

wo e eine Function von ϑ bedeutet. Das Potential derselben Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb der ersten Kugel, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der ersten, auf der Seite des Mittelpunktes der zweiten Kugel liegt, ist dabei:

$$= \int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+x'^2-2ax'\cos\vartheta}}$$

oder

$$= \frac{a}{x'}\int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a^2}{x'}\right)^2-2a\frac{a^2}{x'}\cos\vartheta}}$$

oder

$$= \frac{a}{x'} f\left(\frac{a^2}{x'}\right).$$

Ist $F(x)$ das Potential der auf der zweiten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb derselben, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der zweiten Kugel liegt, so findet man ebenso das Potential der

12*

Elektricität der zweiten Kugel in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb dieser, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der zweiten, auf der Seite des Mittelpunktes der ersten Kugel liegt,

$$= \frac{b}{x'} F\left(\frac{b^2}{x'}\right).$$

Für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$ muss daher

$$f(x) + \frac{b}{c-x} F\left(\frac{b^2}{c-x}\right) = h$$

und für alle Werthe von x zwischen $-b$ und $+b$

$$F(x) + \frac{a}{c-x} f\left(\frac{a^2}{c-x}\right) = g$$

sein. Daraus folgt, dass, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ liegt, $f(x)$ der Gleichung genügt:

$$f(x) - \frac{ab}{c^2-b^2-cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x}.$$

Macht man

$$(1.) \quad f(x) = hf_1(x) - gf_2(x),$$

und setzt der Bequemlichkeit wegen

$$a = 1,$$

so hat man hiernach zur Bestimmung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Gleichungen:

$$(2.) \quad f_1(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx} f_1\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = 1$$

und

$$(3.) \quad f_2(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx} f_2\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = \frac{b}{c-x}.$$

Die Gleichung

$$\frac{c-x}{c^2-b^2-cx} = x$$

oder

$$(4.) \quad x^2 - \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right)x + 1 = 0$$

hat zwei reelle positive Wurzeln, von denen die eine zwischen 0 und 1, die andere zwischen 1 und c liegt; die kleinere Wurzel sei ξ, die grössere also $\frac{1}{\xi}$; dann gilt die Gleichung (2.) — um von dieser zuerst zu sprechen — auch für $x = \xi$, und giebt:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{1 - \frac{b}{c^2-b^2-c\xi}}.$$

Setzt man:

$$x_1 = \frac{c-x}{c^2-b^2-cx},$$

$$x_2 = \frac{c-x_1}{c^2-b^2-cx_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}},$$

so kann man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (2.) $f_1(x)$ durch $f_1(x_n)$ ausdrücken; es wird sich zeigen lassen, dass, wenn n grösser und grösser gemacht wird, x_n sich dem Werthe ξ und also $f_1(x_n)$ sich dem Werthe $f_1(\xi)$ nähert; daraus wird dann folgen, dass $f_1(x)$ direct durch wiederholte Anwendung der Gleichung (2.) gefunden werden kann.

Um die ausgesprochene Behauptung zu beweisen, setze man

$$z = \frac{1+Ax}{1+Bx},$$

$$z_n = \frac{1+Ax_n}{1+Bx_n},$$

und verfüge über die Constanten A und B so, dass

$$z_n = q^4 z_{n-1}$$

wird, wo q eine dritte zu bestimmende Constante bedeutet. Schreibt man die Gleichung zwischen x_n und x_{n-1}:

$$x_n = \frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+\delta x_{n-1}},$$

so muss dann für jeden Werth von x_{n-1}

$$\frac{\gamma+\delta x_{n-1}+A(\alpha+\beta x_{n-1})}{\gamma+\delta x_{n-1}+B(\alpha+\beta x_{n-1})} = q^4\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}}$$

oder

$$\frac{\gamma+A\alpha+(\delta+A\beta)x_{n-1}}{\gamma+B\alpha+(\delta+B\beta)x_{n-1}} = q^4\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}}$$

sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn A und B gleich den Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\alpha\lambda^2+(\gamma-\beta)\lambda-\delta = 0$$

und

$$q^4 = \frac{\gamma+A\alpha}{\gamma+B\alpha}$$

gesetzt werden. Die quadratische Gleichung ist:

$$\lambda^2+\left(c+\frac{1-b^2}{c}\right)\lambda+1 = 0;$$

vergleicht man sie mit der Gleichung (4.), so sieht man, dass ihre Wurzeln

$$-\xi \text{ und } -\frac{1}{\xi}$$

sind. Man kann daher setzen:

$$(5.) \quad z = \frac{1-\frac{x}{\xi}}{1-\xi x},$$

woraus sich, bei Rücksicht auf die Gleichung (4.) ergiebt:

$$(6.) \quad q^4 = \xi^2\frac{c-\frac{1}{\xi}}{c-\xi}.$$

Erwägt man, dass $\xi < 1$ und $\frac{1}{\xi} < c$ ist, so folgt hieraus, dass q^4 positiv und < 1 ist, und dass daher z_n bei wachsendem n sich der Null nähert; weiter findet man aber:

$$\xi-x_n = \frac{\xi(1-\xi^2)z_n}{1-\xi^2 z_n},$$

und hieraus ergiebt sich, dass x_n bei wachsendem n sich dem Werthe ξ nähert.

Die Variable z, die zunächst eingeführt wurde, um diese Behauptung zu beweisen, soll nun in die Gleichung (2.) eingesetzt werden. Ich mache

$$f_1(x) = (1-\xi^2 z)\varphi_1(z),$$

wo der Factor $1-\xi^2 z$ den Zweck hat, zu bewirken, dass in der zwischen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_1(q^4 z)$ entstehenden Gleichung das Verhältniss der Coefficienten dieser beiden Grössen von z unabhängig wird. Berücksichtigt man, dass nach (6.) und (4.):

$$q^2 = \frac{b}{c^2-b^2-c\xi} = \frac{b\xi}{c-\xi},$$

so findet man aus (2.) diese Gleichung:

$$(7.) \quad \varphi_1(z)-q^2\varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1-\xi^2 z}.$$

Setzt man entsprechend

$$f_2(x) = (1-\xi^2 z)\varphi_2(z),$$

so ergiebt sich aus (3.) auf ähnliche Weise:

$$(8.) \quad \varphi_2(z)-q^2\varphi_2(q^4 z) = \frac{q^2}{\xi}\frac{1}{1-q^4 z}.$$

Die Gleichungen (7.) und (8.) geben durch wiederholte Anwendung unmittelbar für $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ die convergirenden Reihen:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi^2 z} + \frac{q^2}{1-q^4\xi^2 z} + \frac{q^4}{1-q^8\xi^2 z} + \cdots$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^4 z} + \frac{q^4}{1-q^8 z} + \frac{q^6}{1-q^{12} z} + \cdots\right).$$

Entwickelt man hier die einzelnen Glieder nach Potenzen von z, so erhält man die Reihen:

$$(9.)\qquad \varphi_1(z) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{\xi^2 z}{1-q^6} + \frac{\xi^4 z^2}{1-q^{10}} + \cdots$$

$$(10.)\qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6 z}{1-q^6} + \frac{q^{10} z^2}{1-q^{10}} + \cdots\right),$$

welche indessen nur convergiren, so lange z unterhalb gewisser Grenzen liegt.

Diese Gleichungen sind zur Berechnung von $f(x)$ für einen gegebenen Werth von x sehr bequem, falls q nicht nahe an 1 liegt, d. h. falls der Abstand der Kugeln nicht klein ist. Man reducirt dabei $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ mit Hülfe der Gleichungen (7.) und (8.) auf $\varphi_1(q^{4n}z)$ und $\varphi_2(q^{4n}z)$, wo n eine Zahl bedeutet, die um so grösser gewählt wird, je grösser die Genauigkeit ist, die man erreichen will, und je näher der Werth von q der Einheit liegt; man berechnet dann $\varphi_1(q^{4n}z)$ und $\varphi_2(q^{4n}z)$ durch die Reihen (9.) und (10.).

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss von $f(0)$, da dieses die Elektricitätsmenge ausdrückt, welche auf der Kugel sich befindet. Bei der Berechnung dieser hat man zu benutzen, dass für $x = 0$, wie aus (5.) hervorgeht, $z = 1$ ist.

Eine Eigenschaft von $f_2(0)$ möge noch hervorgehoben werden; $f_1(0)$ und $f_2(0)$ sind Functionen von zwei Variabeln, von b und c, oder von ξ und q; in dem Ausdrucke von $f_2(0)$ kommt aber nur eine transcendente Function einer Variabeln vor, da $\xi\varphi_2(1)$ nur von q abhängig ist. Dieses $f_2(0)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung; es ist die Elektricitätsmenge, die auf der Kugel gebunden ist, wenn diese mit der Erde in leitender Verbindung steht, und das Potential in der zweiten Kugel $= -1$ ist, wie aus der Gleichung (1.) hervorgeht.

2.

Die gefundenen Gleichungen sollen jetzt in eine andere Form gebracht werden, welche gewisse Vorzüge vor der angegebenen besitzt.

Man setze

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

wo K und K' die Bedeutung haben, in der *Jacobi* diese Zeichen in seiner Theorie der elliptischen Functionen gebraucht, und

$$(11.)\qquad F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-q^{2m}e^{-\frac{2u\pi}{K}}}.$$

Diese für jeden Werth von u convergirende Reihe ergiebt:

$$(12.)\qquad \begin{cases} F(u-K') = F(u)+\dfrac{2\pi}{K}\dfrac{e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-e^{-\frac{2u\pi}{K}}}, \\ F(u-iK) = F(u), \end{cases}$$

wo $i=\sqrt{-1}$, und die folgende Reihe, die convergirt, wenn der reelle Theil von $u > -K'$ ist:

$$(13.)\qquad F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}e^{-\frac{2u\pi m}{K}}.$$

Die in dem vorigen Abschnitt gefundenen Functionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ drücken sich folgendermassen durch diese Function $F(u)$ aus:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}}\frac{K}{4\pi}\left(F(u)-F\left(u+i\frac{K}{2}\right)\right),$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},$$

und

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}}\frac{K}{4\pi}\left(F(u)-F\left(u+i\frac{K}{2}\right)\right).$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}.$$

Die Ausdrücke, welche sich hiernach für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ergeben, lassen sich durch die *eine* Gleichung aussprechen:

$$(14.)\qquad f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}}-\xi\sqrt{z}\right)\frac{K}{4\pi}\left(F(u)-F\left(u+i\frac{K}{2}\right)\right),$$

welche gilt, wenn man den Zeichen f und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(15.)\qquad u_1 = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},\quad u_2 = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}$$

setzt.

Macht man

$$-\log \mathrm{t} = \frac{u\pi}{K},$$

bezeichnet die dem u_1 und u_2 entsprechenden Werthe von t durch t_1 und t_2, und setzt in demselben Sinne, in dem die Gleichung (14.) gilt:

$$(16.) \quad \begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right) G(\mathrm{t}), \\ \text{so findet man aus (12.), (13.), (14.) und (15.):} \\ G(\mathrm{t}) = G(q\mathrm{t}) + \frac{q^2\mathrm{t}^2}{1-q^4\mathrm{t}^4}, \\ G(\mathrm{t}) = \sum_1^\infty \frac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}} \mathrm{t}^{4m-2}, \\ \mathrm{t}_1 = \frac{\sqrt{\xi\sqrt[4]{z}}}{q}, \quad \mathrm{t}_2 = \sqrt[4]{z}, \\ z = \frac{1-\frac{x}{\xi}}{1-\xi x}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den im vorigen Abschnitt entwickelten überein und können, wie jene, zur numerischen Berechnung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ benutzt werden.

Ich will entsprechende Formeln zusammenstellen zur Berechnung der Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der in der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt. Man setze:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) + 2x\frac{df_1(x)}{dx} \\ y_2 &= f_2(x) + 2x\frac{df_2(x)}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ für } x = 1,$$

dann ist die bezeichnete Dichtigkeit:

$$= \frac{1}{2\pi}(hy_1 - gy_2).$$

Bildet man mit Hülfe der Gleichung (14.) die Ausdrücke von y_1 und y_2, und bemerkt, dass zufolge (15.) die Differenz $u_1 - u_2$ von z unabhängig ist, so sieht man, dass auch diese zwei Ausdrücke sich durch *eine* Gleichung aussprechen lassen, nämlich durch die Gleichung:

$$(17.) \quad y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}} i \frac{K^2}{8\pi^2}\left(F'(u) - F'\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

in welcher $F'(u)$ den Differentialquotienten von $F(u)$ nach u bezeichnet, und welche gilt, wenn man den Zeichen y und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(18.)\quad \begin{cases} u_1 = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\xi}}{q^2} - i\frac{K}{4}, \\ u_2 = \frac{K}{2\pi}\log\sqrt{\xi} - i\frac{K}{4} \end{cases}$$

setzt *).

Macht man

$$-\log t = \frac{u\pi}{K} + i\frac{\pi}{4}$$

und

$$(19.)\quad \begin{cases} y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}} H(t), \\ \text{so folgt:} \\ H(t) = H(qt) + \frac{q^2t^2(1-q^4t^4)}{(1+q^4t^4)^2}, \\ H(t) = \sum_1^\infty (-1)^{m+1}(2m-1)\frac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}} t^{4m-2}, \\ t_1 = \frac{\sqrt[4]{\xi}}{q}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}}, \end{cases}$$

wo in der Gleichung für y wieder den Zeichen y und t der Index 1 oder der Index 2 zu geben ist.

3.

Die durch die Gleichung (11.) definirte Function F steht in einem Zusammenhange mit der von *Jacobi* durch Z bezeichneten elliptischen Function. Vergleicht man die Entwickelung dieser mit der in (11.) angegebenen Reihe, so findet man:

$$(20.)\quad F(u) - F(-u-K') = 2iZ(2iu+iK');$$

durch Differentiation folgt hieraus, wenn man durch E das ganze elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet:

$$(21.)\quad F'(u) + F'(-u-K') = 4\frac{E}{K} - 4\Delta^2\text{am}(2iu+iK').$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lassen sich für $f_1(1)+f_2(1)$ und y_1-y_2

*) Eine ähnliche Gleichung lässt sich aufstellen für die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte, in welchem die Kugel zum zweiten Male von der Centrallinie geschnitten wird.

geschlossene Ausdrücke finden. Für $x=1$ ist nach (18.):

$$u_1 = -u_2 - K' - i\frac{K}{2},$$

und daher nach (14.) und (17.):

$$f_1(1)+f_2(1) = -i\frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{4\pi}\left\{F(u_2)-F\left(u_2+i\frac{K}{2}\right)+F\left(-u_2-K'-i\frac{K}{2}\right)-F(-u_2-K')\right\},$$

$$y_1-y_2 = -i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\frac{K^2}{8\pi^2}\left\{F'(u_2)-F'\left(u_2+i\frac{K}{2}\right)-F'\left(-u_2-K'-i\frac{K}{2}\right)+F'(-u_2-K')\right\},$$

also nach (20.) und (21.):

$$f_1(1)+f_2(1) = \frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{2\pi}\{Z(2iu_2+iK')-Z(2iu_2+iK'-K)\},$$

(22.) $$y_1-y_2 = \tfrac{1}{2}i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\frac{K^2}{\pi^2}\{\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK')-\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK'-K)\};$$

dabei ist

$$u_2 = \frac{K'}{2\pi}\log\sqrt{\xi}-i\frac{K}{4}.$$

Man kann hiernach für $f_1(1)+f_2(1)$ und für y_1-y_2 Reihen finden, die um so schneller convergiren, je näher q der 1 kommt. Ich beschränke mich darauf, die Reihe für y_1-y_2 hier anzugeben. Benutzt man, dass

$$\Delta^2\operatorname{am}(iu+K,k) = 1-\Delta^2\operatorname{am}(u+K',k')$$

ist, und setzt

$$q_1 = e^{-\frac{\pi K}{K'}} \quad \text{d. h.} \quad \log q_1 = \frac{\pi^2}{\log q},$$

und

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\frac{\log\xi}{\log q},$$

so findet man:

$$y_1-y_2 = \frac{\pi^2}{(\log q)^2}\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}\sin\alpha+2\frac{\sqrt{q_1^2}}{1+q_1^2}\sin2\alpha+3\frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^3}\sin3\alpha+\cdots\right\}.$$

Sind die Radien der beiden Kugeln gleich, d. h. ist $b=1$, so ist nach (4.)

$$\xi+\frac{1}{\xi} = c,$$

also nach (6.)

$$\xi = q$$

und daher

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;$$

es wird dann also:

(23.) $$y_1-y_2 = \frac{\pi^2}{(\log q)^2}\frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}-3\frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^3}+\cdots\right\}.$$

Wendet man auf diesen Fall die Gleichung (22.) unmittelbar an und bemerkt, dass in ihm

$$u_2 = -\frac{K'+iK}{4}$$

wird, so ergiebt sich:

$$y_1 - y_2 = \frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}} kk' \frac{K^2}{\pi^2}.$$

Nimmt man noch an, dass der Abstand der Kugeln ein unendlich kleiner ist, d. h. dass $1-q$ unendlich klein ist, so giebt die Gleichung (23.) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$y_1 - y_2 = -\frac{4\pi^2}{(\log q)^3} e^{\frac{\pi^2}{2\log q}},$$

oder, wenn man, um das von *Poisson* gebrauchte Zeichen δ einzuführen,

$$2\log q = \delta$$

setzt,

$$y_1 - y_2 = -32\pi^2 \frac{1}{\delta^3} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}.$$

Wie in der Einleitung bereits bemerkt ist, ist diese Grösse von *Poisson* als von der Ordnung von δ^4 gefunden worden, *Plana* hat auf ein Versehen aufmerksam gemacht, welches *Poisson* bei der Herleitung dieses Resultats begangen hat, ist selbst aber zu dem eben so wenig richtigen Schlusse gelangt, dass jene Grösse von der Ordnung von δ^6 ist.

4.

Die in (16.) und (19.) für $G(t)$ und $H(t)$ angegebenen Reihen convergiren sehr langsam, wenn der Abstand der beiden Kugeln sehr klein ist und in Folge dessen ξ und q nahe $=1$ sind. Für diesen Fall sollen für jene Functionen jetzt neue Reihen abgeleitet werden. Um eine Entwickelung der Function $F(u)$, die zu diesen führen wird, zu finden, gehe ich von der Betrachtung des Doppelproductes

$$\prod_1^m \prod_1^N \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)$$

aus, in dem μ und ν ganze Zahlen bedeuten, die alle Werthe von 1 bis m und von 1 bis N erhalten; dabei sollen m und N unendlich gross, doch N von einer unendlich höheren Ordnung als m sein. Ich suche das Verhältniss dieses Doppelproductes zu demjenigen auf, das man aus ihm erhält, wenn man

die oberen Grenzen m und N vertauscht gegen M und n, wo M von derselben Ordnung als N und n von derselben Ordnung als m ist.

Der Logarithmus dieses Verhältnisses ist:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right) - \sum_1^n \sum_{m+1}^M \log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Da die unter dem Zeichen log stehende Grösse unendlich wenig von 1 verschieden ist, so hat man für $\log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$ die convergirende Reihe:

$$u\frac{1}{K'\mu+iK\nu} - \tfrac{1}{2}u^2\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2} + \tfrac{1}{3}u^3\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3} - \cdots.$$

Diese Reihe denke ich mir unter die Summenzeichen gesetzt und untersuche einzeln die Glieder, die die verschiedenen Potenzen von u enthalten. Ich gebrauche dabei einige Formeln aus der Theorie der Γ-Functionen, die ich der Uebersichtlichkeit wegen vorausschicken will.

Ist a eine endliche Grösse, h eine unendlich grosse Zahl, so ist *):

$$\frac{a+1.a+2\ldots a+h}{1\;.\;2\;\ldots\;h} = \frac{h^a}{\Gamma(1+a)},$$

und dieselbe Gleichung gilt, wenn a unendlich gross, aber h von unendlich höherer Ordnung als a ist. Es folgt hieraus:

$$(24.)\qquad \sum_1^h \log(a+h) - \sum_1^h \log h - a\log h = -\log\Gamma(1+a).$$

Wendet man diese Gleichung nur auf Fälle an, in denen der reelle Theil von a nicht negativ ist, und wählt die Logarithmen auf der linken Seite so, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen, so ist nach *Lipschitz* **) dabei:

$$(25.)\quad \begin{cases} \log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + a\log a - a + \tfrac{1}{2}\log a + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3} + \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{2\lambda-1.2\lambda}\frac{1}{a^{2\lambda-1}} + V_\lambda. \end{cases}$$

Hier sind die Logarithmen auf der rechten Seite wieder so zu wählen, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen, λ bedeutet eine beliebige Zahl, B_1, B_2, ... sind die *Bernoulli*schen Zahlen, d. h. es ist:

---

*) *Gauss:* Circa seriem infinitam etc., Commentationes soc. reg. sc. Gottingensis rec. vol. II, 1811—13.

**) Dieses Journal, Bd. 56.

$$\tfrac{1}{2}x \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x = 1 - B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - B_3 \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \cdots;$$

oder

$$B_1 = \tfrac{1}{6}, \quad B_2 = \tfrac{1}{30}, \quad B_3 = \tfrac{1}{42}, \quad \ldots;$$

weiter ist:

$$(26.) \qquad V_\lambda = \frac{2}{(2\pi)^{2\lambda+2}} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^{2\lambda}} \int_0^\infty \frac{y^{2\lambda} e^{-\alpha y}\, dy}{s^2 + \dfrac{y^2}{4\pi^2}}$$

oder

$$(27.) \qquad V_\lambda = \frac{B_{\lambda+1}}{2\lambda+1.2\lambda+2} \frac{1}{\alpha^{2\lambda+1}} (\varepsilon + i\varepsilon'),$$

wo α den reellen Theil von a bedeutet und ε und ε' zwischen -1 und $+1$ liegen.

Die Gleichung (25.) wird zunächst auf Fälle angewendet werden, in denen der reelle oder der imaginäre Theil von a unendlich gross ist. Ist der reelle Theil von a unendlich gross, so zeigt der in (27.) angegebene Werth von V_λ, dass die Gleichung (25.), wenn man in ihr V_λ vernachlässigt, den Werth von $\log \Gamma(1+a)$ genau darstellt bis auf eine Grösse von der Ordnung von $\alpha^{-(2\lambda+1)}$; ist der imaginäre Theil von a unendlich gross, so geben die nicht verschwindenden Glieder der in (25.) aufgestellten Reihe bei Vernachlässigung von V_λ den Werth von $\log \Gamma(1+a)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich mit Hülfe der Gleichung (26), indem man erwägt, dass die Integrale

$$\int \psi(y) \sin(\beta y)\, dy \quad \text{und} \quad \int \psi(y) \cos(\beta y)\, dy,$$

genommen zwischen irgend zwei von β unabhängigen Grenzen, zwischen denen $\psi(y)$ nicht unendlich wird, sich der Null nähern, wenn β mehr und mehr wächst. Um den Beweis auch auf den Fall auszudehnen, dass der reelle Theil von a verschwindet, hat man dabei noch von der Gleichung:

$$\log \Gamma(1+a) = \log \Gamma(2+a) - \log(1+a)$$

Gebrauch zu machen.

Für die Differentialquotienten von V_λ nach a gelten ähnliche Ausdrücke, als sie für V_λ in (26.) und (27.) angegeben sind; daraus folgt, dass die Reihen, die durch Differentiation aus der in (25.) vorkommenden Reihe entstehen, die Eigenschaften haben, die analog der für diese ausgesprochenen sind.

Sind a und h endlich oder unendlich gross von beliebigen Ordnungen, so hat man:

$$\frac{a+1.a+2\ldots a+h}{1\,.\,2\ldots\ldots h} = \frac{\Gamma(1+h+a)}{\Gamma(1+h)\Gamma(1+a)}$$

und

$$(28.)\quad \sum_1^h \log(a+h) - \sum_1^h \log h = \log\Gamma(1+h+a) - \log\Gamma(1+h) - \log\Gamma(1+a),$$

bei welcher Gleichung die Gleichung (25.) unter denselben Bedingungen gilt, wie bei der Gleichung (24.).

Dieses vorausgeschickt, hat man:

$$\sum_{n+1}^{N} \frac{1}{K'\mu+iK\nu} = -\frac{i}{K}\sum_1^{N-n} \frac{1}{\nu+n-i\frac{K'}{K}\mu},$$

oder nach (24.), wenn man mit *Gauss*

$$\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da} = \psi(a)$$

setzt:

$$\sum_{n+1}^{N} \frac{1}{K'\mu+iK\nu} = -\frac{i}{K}\log(N-n)+\frac{i}{K}\psi\Big(n-i\frac{K'}{K}\mu\Big).$$

Benutzt man (25.) und vernachlässigt Glieder, die unendlich klein gegen $\frac{1}{n}$ sind, was erlaubt ist, da diese zu der zu bildenden Doppelsumme nur unendlich wenig beitragen können, so findet man dieselbe Grösse

$$= -\frac{i}{K}\log N+\frac{i}{K}\log\Big(n-i\frac{K'}{K}\mu\Big)+\frac{i}{2K}\,\frac{1}{n-i\frac{K'}{K}\mu}.$$

Erwägt man, dass

$$\log\Big(n-i\frac{K'}{K}\mu\Big) = \log\Big(-i\frac{K'}{K}\Big)+\log\Big(\mu+i\frac{K}{K'}n\Big)$$

und

$$\frac{1}{n-i\frac{K'}{K}\mu} = i\frac{K}{K'}\,\frac{1}{\mu+i\frac{K}{K'}n}$$

ist, so findet man hieraus mit Hülfe von (28.) und (25.):

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{K'\mu+iK\nu}$$

$$= \frac{i}{K}\Big\{-m\log N-(m+\tfrac{1}{2})\log m+m\log\Big(-i\frac{K'}{K}\Big)+\sum_1^m\log\mu-\tfrac{1}{2}\log 2\pi\Big\}$$

$$+\frac{i}{2KK'}\Big\{((2m+1)K'+(2n+1)iK)\log\frac{mK'+niK}{K'}-(K'+(2n+1)iK)\log\frac{niK}{K'}\Big\},$$

wo alle vorkommenden Logarithmen so zu wählen sind, dass ihre imaginären

Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen. Vertauscht man in dieser Gleichung K mit K', μ mit ν, m mit n, N gegen M, i gegen $-i$ und dividirt sie durch i, so erhält man:

$$\sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{K'\mu + iK\nu}$$

$$= \frac{1}{K'}\left\{n\log M + (n+\tfrac{1}{2})\log n - n\log\left(i\frac{K}{K'}\right) - \sum_1^n \log\nu + \tfrac{1}{2}\log 2\pi\right\}$$

$$+\frac{i}{2KK'}\left\{((2m+1)K' + (2n+1)iK)\log\frac{nK - miK'}{K} - ((2m+1)K' + iK)\log\left(-\frac{miK'}{K}\right)\right\}.$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{K'\mu + iK\nu} - \sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{K'\mu + iK\nu}$$

$$= -\frac{i}{K} m\log N + \frac{i}{K}\sum_1^m \log\mu - \frac{i}{K}(m+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'} - \frac{1}{2K'}\log m2\pi$$

$$-\frac{1}{K'} n\log M + \frac{1}{K'}\sum_1^n \log\nu + \frac{1}{K'}(n+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'} - \frac{i}{2K}\log n2\pi.$$

Auf ähnlichem Wege findet man, dass

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^2} - \sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^2} = \frac{i}{KK'}\log\frac{niK}{mK'}$$

ist, und dass die Ausdrücke:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^3}, \qquad \sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^3},$$

so wie diejenigen, die aus diesen entstehen, wenn man für den Exponenten 3 einen höheren setzt, verschwinden.

Hieraus folgt:

$$\frac{iu}{K}\left\{m\log N - \sum_1^m \log\mu + (m+\tfrac{1}{2})\log\frac{iK}{K'} - \frac{iK}{2K'}\log m2\pi\right\}$$

$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log mK' + \log\prod_1^m\prod_1^N\left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)$$

$$= \frac{u}{K'}\left\{-n\log M + \sum_1^n \log\nu + (n+\tfrac{1}{2})\log\frac{iK}{K'} - \frac{iK'}{2K}\log n2\pi\right\}$$

$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log niK + \log\prod_1^n\prod_1^M\left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right).$$

Addirt man zu dieser Gleichung diejenige, die aus ihr entsteht, wenn man $-i$ für i setzt, dabei aber u ungeändert lässt, so erhält man:

$$(29.)\quad \left\{\begin{aligned} & u\Big(\frac{1}{K'}\log m2\pi-\frac{\pi}{K}(m+\tfrac{1}{2})\Big)-\frac{u^2\pi}{2KK'} \\ & +\log\prod_1^m\prod_1^N\Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big) \\ = & \frac{2u}{K'}\Big(-n\log M+\sum_1^n\log\nu+(n+\tfrac{1}{2})\log\frac{K}{K'}\Big) \\ & +\log\prod_1^n\prod_1^M\Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big). \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber

$$\prod_1^N\Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big) = \prod_1^N\frac{\nu-\dfrac{u+K'\mu}{K}i}{\nu-\dfrac{K'\mu}{K}i}$$

oder nach (24.)

$$= N^{-\frac{iu}{K}}\frac{\Gamma\Big(1-\dfrac{K'\mu}{K}i\Big)}{\Gamma\Big(1-\dfrac{u+K'\mu}{K}i\Big)}.$$

Da weiter

$$(30.)\quad \Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

$$\sin ix = \frac{i}{2}e^x(1-e^{-2x})$$

und

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so folgt hieraus bei abermaliger Rücksicht auf (24.):

$$\prod_1^m\prod_1^N\Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big)$$

$$= e^{-\frac{u}{K'}\log m+\frac{u}{K}m\pi}\,\Gamma\Big(1+\frac{u}{K'}\Big)\prod_1^m\frac{1-q^{2\mu}e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-q^{2\mu}}.$$

Ferner erhält man aus (24.)

$$\prod_1^n\prod_1^M\Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big)$$

$$= e^{\frac{2u}{K'}n\log M}\prod_1^n\frac{\Gamma\Big(1+\dfrac{\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1-\dfrac{\nu iK}{K'}\Big)}{\Gamma\Big(1+\dfrac{u+\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1+\dfrac{u-\nu iK}{K'}\Big)}.$$

Setzt man diese Werthe der beiden Doppelproducte in die Gleichung (29.), differentiirt dieselbe nach u und berücksichtigt die Gleichung (11.), so findet man:

$$(31.)\quad F(u) = \frac{2}{K'}\Big(\sum_1^n \log\nu + n\log\frac{K}{K'}\Big) + \frac{1}{K'}\log\frac{K}{2\pi K'} + \frac{\pi}{2K} + \frac{u\pi}{KK'}$$
$$-\frac{d}{du}\log\Gamma\Big(1+\frac{u}{K'}\Big)\prod_1^n \Gamma\Big(1+\frac{u+\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{u-\nu iK}{K'}\Big).$$

Diese Gleichung kann benutzt werden, um mit Hülfe von (25.) $F(u)$ auf eine neue Weise zu entwickeln; und zwar kann man so zwei Entwickelungen für $F(u)$ finden, eine, indem man $\log\Gamma\big(1+\frac{u}{K'}\big)$ in der Rechnung beibehält, und eine zweite, indem man auch diese Grösse entwickelt.

Die Gleichung (25.) setzt voraus, dass der reelle Theil von a nicht negativ ist; demgemäss soll jetzt angenommen werden, dass der reelle Theil von u nicht negativ ist.

Vernachlässigt man vorerst in (25.) den Rest V_λ, bezeichnet mit U eine Function der Veränderlichen ζ und mit Ω die Reihe:

$$(32.)\quad U - \tfrac{1}{2}\log q\frac{dU}{d\zeta} + \frac{B_1}{1.2}(\log q)^2\frac{d^2U}{d\zeta^2} - \frac{B_2}{1.2.3.4}(\log q)^4\frac{d^4U}{d\zeta^4}$$
$$+\frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}(\log q)^6\frac{d^6U}{d\zeta^6} - \cdots,$$

so findet man bei Rücksicht auf die Gleichung (24.) und die Gleichungen, die durch wiederholte Differentiation aus dieser entstehen:

$$(33.)\quad \begin{cases} K'F(u) = -\log(-2\log q) - \tfrac{1}{2}\log q + \zeta - \psi\Big(\frac{u}{K'}\Big) + \Omega, \\ \text{wo} \\ U = \log\Gamma\Big(1+\frac{i\zeta}{\pi}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{i\zeta}{\pi}\Big), \\ \zeta = \frac{u\pi}{K}. \end{cases}$$

Hierbei ist noch zu bestimmen, welcher Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist. Es soll angenommen werden, dass der imaginäre Theil von u zwischen $-iK$ und $+iK$ liegt. Unter dieser Bedingung wird bei der Herleitung der Gleichungen (33.) die Gleichung (24.) nur auf Fälle angewendet, in welchen der reelle Theil von $a > -1$ ist; in solchen Fällen gilt für das dort vorkommende $\log\Gamma(1+a)$ die Gleichung, welche entsteht,

wenn man durch die Gleichung (25.) und die Gleichung

$$\log \Gamma(a) = \log \Gamma(1+a) - \log a$$

$\log \Gamma(a)$ ausdrückt und dann $1+a$ für a setzt. Daraus folgt, dass jenes $\log \Gamma(1+a)$ sich stetig mit a ändert und reell ist, wenn a reell ist, und weiter, dass in (33.) derjenige Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist, der sich mit ζ stetig ändert und reell ist, wenn der reelle Theil von ζ verschwindet. Es lässt sich hiernach und zufolge der Gleichung (30.) der Werth von U auch schreiben:

$$U = \log \frac{i\zeta}{\sin i\zeta}$$

oder

$$= \log \frac{2\zeta}{e^{\zeta} - e^{-\zeta}},$$

wo derjenige Werth des Logarithmus zu nehmen ist, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Entwickelt man in (31.) auch $\Gamma\left(1+\frac{u}{K'}\right)$ nach (25.), so findet man:

$$(34.)\quad \begin{cases} K'F(u) = \Omega, \\ \text{wo } \Omega \text{ wieder die Reihe (32.) bedeutet und} \\ U = -\log(1-e^{-2\zeta}), \\ \zeta = \frac{u\pi}{K} \end{cases}$$

ist; auch hier hat man bei der Bildung von U denjenigen Werth des Logarithmus zu nehmen, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Berücksichtigt man bei der Bildung der in (33.) und (34.) für $F(u)$ angegebenen Reihen den Rest V_λ der Reihe (25.), so erhält man mit Hülfe der Gleichung (26.) Ausdrücke für die Reste jener. Benutzt man die Gleichung:

$$\int_0^\infty f(y)\{\cos 2y + \cos 4y + \cdots + \cos 2ny\}\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\,dy + \tfrac{1}{2}\pi\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \cdots\},$$

in welcher n eine unendlich grosse Zahl bedeutet, so stellen sich diese Ausdrücke in einer Form dar, die ähnlich derjenigen ist, in welcher V_λ in (27.) angegeben ist, in einer Form, welche zeigt, dass ihre Werthe beliebig klein gemacht werden können dadurch, dass man den reellen Theil von u mit Hülfe

der Gleichung (12.) mehr und mehr vergrössert. Nimmt man mit jenen Restausdrücken nicht die angedeutete Transformation vor und stellt in Beziehung auf sie eine Betrachtung an, wie sie in Beziehung auf den Ausdruck von V_1 in (26.) oben angegeben ist, so sieht man, dass die Reihen für $F(u)$ in (33.) und (34.) noch eine andere Bedeutung haben. Ist nämlich K unendlich gross, so geben diejenigen Glieder der Reihe (33.), welche nicht verschwinden, den Werth von $F(u)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an; ist überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK, so gilt dasselbe von der Reihe (34.). Es ist hiernach, wenn K unendlich gross ist:

$$(35.)\qquad K'F(u) = -\log(-2\log q)-\psi\left(\frac{u}{K'}\right)+\log\frac{2\zeta}{1-e^{-2\zeta}},$$

und, wenn überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK ist:

$$(36.)\qquad K'F(u) = -\log(1-e^{-2\zeta}),$$

wo

$$\zeta = \frac{u\pi}{K}.$$

Mit Hülfe von (33.) und (34.) ist es leicht Gleichungen zu bilden, welche statt der Gleichungen (16.) und (19.) zur Berechnung von $f(x)$ und y dienen können.

Setzt man

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{s}}-\xi\sqrt{s}\right)\frac{1}{4\log q}\left\{\log(-\log q)+\psi\left(\frac{\log t}{\log q}\right)-J(t)\right\},$$

so findet man

$$J(t) = J(qt)-\log q\left(\frac{4q^2t^2}{1-q^4t^4}+\frac{1}{\log qt}\right)$$

und $J(t)=\Omega$, wo $U=\log\frac{\zeta(1+e^{-2\zeta})}{1-e^{-2\zeta}}$. Für die in (19.) vorkommende Grösse $H(t)$ erhält man:

$$H(t)=-\frac{1}{2\log q}\Omega,\quad \text{wo}\quad U=\frac{e^{-2\zeta}}{1+e^{-4\zeta}}.$$

Hier, wie dort, bedeutet Ω die Reihe (32.) und ist

$$\zeta = -\log t;$$

die Werthe von t sind die in (16.) und (19.) angegebenen.

Für das in der Reihe für $H(t)$ vorkommende U hat man:

$$U = \quad t^2\frac{1}{1+t^4},$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -2t^2\frac{1-t^4}{(1+t^4)^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} = 4t^2\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^3}$$

und allgemein:

$$\frac{d^nU}{d\zeta^n} = (-2)^n t^2\frac{1+A_n t^4+B_n t^8+C_n t^{12}+\cdots}{(1+t^4)^{n+1}},$$

wo

$$A_n = (n+1)-3^n,$$

$$B_n = \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}-(n+1)3^n+5^n,$$

$$C_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}3^n+(n+1)5^n-7^n,$$

. . . .

Es soll schliesslich noch der Fall betrachtet werden, dass die beiden Kugeln einander berühren und das Gesammtpotential in ihnen einen gleichen Werth hat.

Setzt man den Abstand der beiden Kugeln als unendlich klein voraus und bezeichnet ihn durch ε, d. h. macht man

$$c = 1+b+\varepsilon,$$

so findet man aus (4.) und (6.)

$$\xi = 1-\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$q = 1-\sqrt{\frac{1+b}{2b}\varepsilon}$$

und aus (5.) und (15.) unter der Annahme, dass $1-x$ unendlich gross gegen $\sqrt{\varepsilon}$ ist:

$$z = 1-\frac{2x}{1-x}\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$\frac{u_1}{K'} = \frac{b}{1+b}\,\frac{1}{1-x}-1,$$

$$\frac{u_2}{K'} = \frac{b}{1+b}\,\frac{x}{1-x}.$$

Nach (1.) hat man:

$$f(x) = h\big(f_1(x)-f_2(x)\big),$$

und daher nach (14.), (35.) und (36.):

$$(37.)\quad f(x) = h\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x}\left\{\psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{x}{1-x}\right)-\psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x}-1\right)\right\}.$$

Diese Gleichung gilt auch für diejenigen Werthe von x, für welche u_1 negativ ist, obwohl bei der Ableitung von (35.) und (36.) vorausgesetzt wurde, dass der reelle Theil von u positiv sei. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht mit Hülfe der Gleichung (12.) und der Gleichung

$$\psi(a-1) = \psi(a)-\frac{1}{a}.$$

Die Gleichung (37.) stimmt mit der Gleichung (115.) in *Planas* Abhandlung überein.

Heidelberg, im Januar 1861.

Ueber die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können.

(Von Herrn *F. Joachimsthal* zu Breslau.)

---

§. 1.

Es sei $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ die Gleichung des Ellipsoides, (ξ,η,ζ) der gegebene Punkt; für den Fusspunkt einer durch (ξ,η,ζ) gehenden Normale gelten die Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{\xi-x}{\frac{x}{a}}=\frac{\eta-y}{\frac{y}{b}}=\frac{\zeta-z}{\frac{z}{c}}.$$

Setzt man diese Brüche $=-u$, so erhält man

$$(2.)\qquad x=\frac{a\xi}{a-u},\quad y=\frac{b\eta}{b-u},\quad z=\frac{c\zeta}{c-u},$$

und zur Bestimmung von u die Gleichung sechsten Grades

$$(3.)\qquad \frac{a\xi^2}{(a-u)^2}+\frac{b\eta^2}{(b-u)^2}+\frac{c\zeta^2}{(c-u)^2}=1.$$

Wie sich aus (1.) ergiebt, ist u das Product der Entfernungen des Punktes (ξ,η,ζ) und des Anfangspunktes von der das Ellipsoid in (x,y,z) berührenden Ebene, dieses Product positiv oder negativ genommen, je nachdem beide Punkte auf derselben Seite der Ebene liegen oder nicht. Für den vorliegenden Zweck ist es angemessen in (3) statt ξ, η, ζ drei andere Constante einzuführen *).

---

*) Für das ebene Problem, über welches ich hier einige Bemerkungen einschalte, dürfte die analoge Gleichung $\frac{a\xi^2}{(a-u)^2}+\frac{b\eta^2}{(b-u)^2}=1$ die bequemste und am meisten symmetrische Behandlung der Aufgabe gestatten. Setzt man ihre linke Seite $=f(u)$, so ist für den Fall der Ellipse $(a>0,\ b>0,\ a>b)$ $f(u)$ stets positiv, verschwindet nur für $u=\pm\infty$, und wird $=\infty$ für $u=b$ oder $=a$; $f'(u)=2\left\{\frac{a\xi^2}{(a-u)^3}+\frac{b\eta^2}{(b-u)^3}\right\}$ verschwindet nur *ein* Mal für den Werth u_1, der zwischen b und a liegt, und durch die Gleichung $\frac{a-u_1}{b-u_1}=-\left(\frac{a\xi^2}{b\eta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ gegeben ist. Der zugehörige Werth von $f(u_1)$ ist

Die Gleichung (3.) hat nothwendig zwei reelle Wurzeln, von denen, wenn wir, wie durchweg, $a > b > c$ annehmen, eine zwischen $-\infty$ und c, die andere zwischen a und $+\infty$ liegt. Die eine dieser Wurzeln sei bekannt $= v$, und die Coordinaten des Fusspunktes der ihr entsprechenden Normale

---

demnach ein Minimum $\doteq \frac{(a^{\frac{1}{3}}\xi^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}})^3}{(a-b)^2}$ und $f(u)$ hat folgenden Gang:

$u = -\infty$	$> -\infty$ u. $< b$	b	$> b$ u. $< u_1$	u_1	$> u_1$ u. $< a$	a	$> a$	$+\infty$
$f(u) = 0$	zunehmend	∞	abnehmend	$f(u_1)$	zunehmend	∞	abnehmend	0;

es erreicht daher den Werth *eins*, je nachdem $f(u_1) \lesseqgtr 1$, vier-, drei- oder zweimal. Für die Hyperbel sind geringe Modificationen des Verfahrens nöthig.

Hat man sich aber auf irgend eine Weise überzeugt, dass die Gleichung, von welcher man das Problem abhängig macht, zwei reelle Wurzeln besitzt, so kann man eine Betrachtung anwenden, die für alle biquadratischen Gleichungen gilt, die diese Eigenschaft besitzen. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Wurzeln einer solchen, so reicht, und das ist das Characteristische dieser Gleichungen, das Vorzeichen der einzigen symmetrischen Function

$$\Delta = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2$$

hin, um zu entscheiden, ob die Gleichung vier oder nur zwei reelle Wurzeln hat, im ersten Falle ist Δ positiv, im zweiten sind, wenn nur α und β reell,

$$(\alpha-\beta)^2, \quad (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta), \quad (\beta-\gamma)(\beta-\delta)$$

positiv, dagegen $(\gamma-\delta)^2$ negativ, also auch Δ. Da ausserdem $\Delta = 0$ die Bedingung zweier gleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung ist, und im Normalenproblem die Coordinaten eines jeden Punktes der Evoluten der Gleichung vierten Grades zwei zusammenfallende Wurzeln verschaffen, so sieht man a priori, dass wenn $E = 0$ die rationale Gleichung der Evoluten ist, E zum wenigsten ein Factor von Δ sein muss. Behufs einer genaueren Vergleichung muss man Δ als Function der Coefficienten kennen; nach *Cayley*'s schöner Darstellung ist für die Gleichung:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0, \quad a^6\Delta = J^3 - 27J_1^2,$$

wo

$$J = ae - 4bd + 3c^2; \quad J_1 = ace - ad^2 - eb^2 - 2c^3 + 2bcd.$$

Eine dritte hieher gehörende Betrachtung ist folgende. Sind $U = 0$, $U_1 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so ist der Factor λ, welcher $U + \lambda U_1$ in lineare Factoren zerlegbar macht, durch eine kubische Gleichung gegeben, die im Falle von vier reellen Durchschnitten beider Curven drei reelle Wurzeln hat, aber nur eine, wenn die Curven sich in zwei reellen Punkten oder gar nicht schneiden. Weiss man demnach anderweitig, dass die Curven wenigstens zwei reelle Punkte gemein haben, (so z. B. im Normalenproblem der gegebene Kegelschnitt und die Hülfshyperbel), so ist die kubische Gleichung entscheidend.

Die bekannte Aufgabe „durch einen Punkt eine Grade zu ziehen, deren von zwei schiefwinkligen Axen begrenztes Stück eine gegebene Länge hat" bietet mit dem ebenen Normalenprobleme sehr viele Analogieen dar; namentlich aber ergeben sich die Realitätsbedingungen durch die zuletzt angeführten Methoden, weil die Aufgabe unter ihren vier Lösungen ebenfalls immer zwei reelle hat.

$= x_0, y_0, z_0$, so erhält man aus (2.) die Gleichungen

$$(4.)\quad \xi = \frac{x_0(a-v)}{a},\quad \eta = \frac{y_0(b-v)}{b},\quad \zeta = \frac{z_0(c-v)}{c},$$

und da (x_0, y_0, z_0) ein Punkt der Fläche, so lassen sich bekanntlich zwei reelle Grössen α und β einführen, von denen die grössere α zwischen a und b, die kleinere β zwischen b und c liegt, so dass

$$(4^*.)\quad x_0^2 = \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\quad y_0^2 = \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)},\quad z_0^2 = \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}.$$

Mit Hülfe von (4.) und (4*.) verwandelt sich (3.) in

$$(5.)\quad \frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}\frac{(a-v)^2}{(a-u)^2} + \frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)}\frac{(b-v)^2}{(b-u)^2} + \frac{(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}\frac{(c-v)^2}{(c-u)^2} = 1.$$

Von den Constanten α, β, v, welche die ursprünglichen ξ, η, ζ ersetzen, bestimmen α, β den Fusspunkt einer durch (ξ, η, ζ) gehenden Normale, und v die Lage des Punktes auf derselben, indem, wenn π das Loth vom Mittelpunkte der Fläche auf die Tangentialebene im Punkte (α, β) des Ellipsoides bezeichnet, $\frac{v}{\pi}$ die auf der Normale gemessene Entfernung des Punktes (ξ, η, ζ) vom Fusspunkte bedeutet, die Richtung nach dem Inneren des Ellipsoides als positiv angenommen. Für α und β gelten die Bedingungen $a > \alpha > b > \beta > c$, so jedoch, dass das Zusammenfallen von α und β mit einem der Grenzwerthe ausgeschlossen bleibe, d. h. dass die als gegeben angesehene Normale in keinem der Hauptschnitte liege, ein Fall, der besonders erledigt werden wird. Die Grösse v kann jeden beliebigen Werth haben.

Um aus (5.) die Wurzel $u = v$ fortzuschaffen, schreiben wir

$$a-v = a-u+u-v, \text{ u. s. w.},$$

und erhalten

$$\Sigma\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)} + 2(u-v)\Sigma\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{a-u} + (u-v)^2\Sigma\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{(a-u)^2} = 1.$$

Die erste Summe ist $= 1$, die zweite $= \frac{(\alpha-u)(\beta-u)}{(a-u)(b-u)(c-u)}$, und wenn dieser Ausdruck mit $f(u)$ bezeichnet wird, die dritte $= f'(u)$. Die vorhergehende Gleichung geht somit in

$$(u-v)\{2f(u)+(u-v)f'(u)\} = 0$$

über; oder mit Fortlassung des Factors $u-v$ in

$$(6.)\quad \frac{2}{u-v} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\beta}.$$

Diese Gleichung fünften Grades bildet den Ausgangspunkt gegenwärtiger Untersuchung.

§. 2.

Es handelt sich darum für jeden Werth von v die Anzahl der reellen Wurzeln von (6.) zu bestimmen. Nun ergiebt sich aus (6.) zu irgend einem reellen Werthe von u durch eine Gleichung ersten Grades ein reeller Werth von v. Lässt man u alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, und bekommt hierbei v einen bestimmten Werth v_0 $n$mal, so wird umgekehrt (6.), wenn man darin v_0 statt v einsetzt, n reelle Wurzeln u haben. Es ist daher der Gang von v als einer durch (6.) definirten Function von u zu untersuchen. Die rechte Seite von (6.) $\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u-\alpha}+\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u-\beta}+\frac{1}{u-c}$ lässt sich schreiben

$$(7.)\qquad \frac{1}{u-a}-\frac{\alpha-b}{(u-\alpha)(u-b)}-\frac{\beta-c}{(u-\beta)(u-c)}$$

und

$$(7.^*)\qquad \frac{a-\alpha}{(u-a)(u-\alpha)}+\frac{b-\beta}{(u-b)(u-\beta)}+\frac{1}{u-c}.$$

In Folge der Ungleichungen $a>\alpha>b>\beta>c$ wird, wenn man den Raum von $-\infty$ bis $+\infty$ in die sechs Intervalle theilt

$-\infty$ bis c, c bis β, β bis b, b bis α, α bis a, a bis $+\infty$,

für das erste, dritte und fünfte Intervall (7.) eine Summe negativer Glieder, und (7.*) für die drei anderen eine Summe positiver Glieder sein. Die linke Seite von (6.) verschwindet demnach für kein endliches reelles u. Dasselbe findet daher auch, wenn man aus (6.) den Werth von v ableitet,

$$(8.)\qquad v = u-2\frac{(u-a)(u-\alpha)(u-b)(u-\beta)(u-c)}{W} = \frac{U}{W},$$

wo U vom fünften, W vom vierten Grade ist, für den Nenner W statt, der, weil er mit $+u^4$ beginnt, stets positiv bleibt; somit ist v eine continuirliche Function von u. Vermittelst (8.) gewinnen wir den ersten Ueberblick über ihren Gang

$$(9.)\qquad \begin{cases} u=-\infty & c & \begin{smallmatrix}>c\\<\beta\end{smallmatrix} & \beta & \begin{smallmatrix}>\beta\\<b\end{smallmatrix} & b & \begin{smallmatrix}>b\\<\alpha\end{smallmatrix} & \alpha & \begin{smallmatrix}>\alpha\\<a\end{smallmatrix} & a & +\infty \\ v=+\infty & c & <\beta & \beta & >\beta & b & <\alpha & \alpha & >\alpha & a & -\infty. \end{cases}$$

Die weitere Kenntniss des Ganges von v verlangt die Bestimmung seiner

Maxima und Minima. Nun ist zufolge (8.) $\frac{dv}{du} = -\frac{\varphi(u)}{W^2}$ (wo $\varphi(u)$ einen mit $+u^8$ beginnenden Ausdruck achten Grades bedeutet), also ebenfalls eine continuirliche Function von u, und v wird nur für die Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ ein Maximum oder Minimum; da nun $\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{W\varphi'(u) - 2W'\varphi(u)}{W^3}$ für die Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ in $-\frac{\varphi'(u)}{W^2}$ übergeht, so werden den *einfachen* Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ wirkliche Maxima oder Minima entsprechen. Die Differentiation von (6.) ergiebt

$$\frac{2}{(u-v)^2}\left(\frac{dv}{du}-1\right) = -\frac{1}{(u-a)^2}-\frac{1}{(u-b)^2}-\frac{1}{(u-c)^2}+\frac{1}{(u-\alpha)^2}+\frac{1}{(u-\beta)^2};$$

setzt man hierin $\frac{dv}{du} = 0$ und eliminirt v mit Hülfe von (6.), so kommt

$$(10.)\quad \begin{cases} 2\left\{\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}\right\} \\ \qquad -\left\{\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}\right\}^2 = 0, \end{cases}$$

welche Gleichung nach Wegschaffung der Nenner in $\varphi(u) = 0$ übergeht.

Wir wollen jetzt die Anzahl und Grenzen der reellen Wurzeln dieser Gleichung achten Grades bestimmen.

§. 3.

Lemma. Es sei $\varphi(u)$ eine ganze Function von u, $\frac{d\varphi}{du} = \varphi'(u)$, V und φ'' zwei beliebige aber durch die Relation

$$(11.)\quad \varphi - V\varphi' + \varphi'' = 0$$

von einander abhängige Functionen von u, so hat $\varphi(u) = 0$ innerhalb jeden Intervalles von $u = A$ bis $u = B$ $(A < B)$, in welchem V und φ'' endlich bleiben und φ'' weder sein Zeichen wechselt noch verschwindet, erstens keine mehrfachen Wurzeln, und zweitens so viel reelle Wurzeln, als die Functionenreihe φ, φ', φ'' für $u = A$ mehr Zeichenwechsel hat, als für $u = B$, demnach höchstens zwei.

Der erste Theil der Behauptung ist evident; der zweite beweist sich nach der *Sturm*schen Methode, indem, wenn u von A bis B wächst, Aenderungen in den Vorzeichen nur dadurch hervorgebracht werden, dass u durch eine einfache Wurzel von $\varphi(u) = 0$ oder $\varphi'(u) = 0$ geht, im ersten Falle aber be-

kanntlich ein Zeichenwechsel zwischen φ und φ' verloren geht, im zweiten die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe φ, φ', φ'' ungeändert bleibt.

Diesen Hülfssatz wollen wir auf die Gleichung (10.) anwenden. Wir schreiben

$$(u-a)(u-b)(u-c) = D,\quad (u-\alpha)(u-\beta) = \Delta,\quad \frac{D}{\Delta} = z,$$

$$\varphi(u) = D^2\Delta^2 \left\{ \begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}\right) \\ -\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}\right)^2 \end{array} \right\},$$

so ist

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}$$

und

$$\varphi(u) = D^2\Delta^2\left\{\frac{2(z'^2-zz'')}{z^2}-\frac{z'^2}{z^2}\right\} = \Delta^4(z'^2-2zz''),$$

woraus

$$\varphi'(u) = 4\Delta^3\Delta'(z'^2-2zz'')-2\Delta^4 zz'''$$

und

$$(12.)\qquad 4\Delta'\varphi(u)-\Delta\varphi'(u) = 2\Delta^4 Dz'''.$$

Nun ist

$$z = \frac{D}{\Delta} = u+\lambda+\frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{u-\alpha}+\frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}\,\frac{1}{u-\beta},$$

wo λ kein u enthält, folglich

$$\Delta^4 z''' = -6\left\{\frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)}{\alpha-\beta}(u-\beta)^4+\frac{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)}{\beta-\alpha}(u-\alpha)^4\right\} = -6f(u).$$

Die Coefficienten von $(u-\beta)^4$ und $(u-\alpha)^4$ innerhalb der Klammer sind wesentlich negativ, also auch $f(u)$. Durch Substitution der Werthe von Δ', Δ; D und $\Delta^4 z'''$ verwandelt sich (12.) in die (11.) analoge Gleichung

$$(13.)\qquad \varphi(u)-\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{4(2u-\alpha-\beta)}\varphi'(u)+\frac{3(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta}f(u) = 0.$$

Bei der Anwendung des Lemma's können wir nach dem über $f(u)$ Gesagten

$$(14.)\qquad \varphi''(u) = -\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{2u-\alpha-\beta}$$

setzen; eine Function, die ihr Zeichen ändert, sobald u durch a, b, c und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ geht. Nun ist $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) < a$ und $> c$, kann aber eben sowohl $> b$ als $< b$ sein. Bei der Feststellung der Intervalle, in welchen φ'' sein Zeichen nicht ändert, müssen diese beiden Fälle daher gesondert werden.

Weil $\varphi(u)$ mit $+u^8$ beginnt, haben wir

$$(15.)\quad \begin{cases} \varphi(-\infty) = +; \quad \varphi(+\infty) = +; \quad \text{ferner findet man ohne Weiteres} \\ \varphi(c) \quad = (c-a)^2(c-b)^2(c-\alpha)^2(c-\beta)^2 \text{ also } =+, \text{ eben so } \varphi(b),\ \varphi(c), \\ \varphi(\beta) \quad = -3(\beta-a)^2(\beta-b)^2(\beta-c)^2(\beta-\alpha)^2 \text{ also } =-, \text{ ebenso } \varphi(\alpha). \end{cases}$$

Ferner

$$(16.)\quad \begin{cases} \varphi'(-\infty) = -, \quad \varphi'(+\infty) = +, \text{ und aus (13.) ergiebt sich} \\ \varphi'(a) \quad = \dfrac{4(2a-\alpha-\beta)}{(a-\alpha)(a-\beta)}\varphi(a), \text{ also } =+, \\ \varphi'(b) \quad = \dfrac{4(2b-\alpha-\beta)}{(b-\alpha)(b-\beta)}\varphi(b), \text{ also } =-, \text{ wenn } b > \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{und } =+, \text{ wenn } b < \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \\ \varphi'(c) \quad = \dfrac{4(2c-\alpha-\beta)}{(c-\alpha)(c-\beta)}\varphi(c) \text{ also } =-, \\ \varphi'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\dfrac{48}{(\alpha-\beta)^2}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-a\right)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-b\right)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-c\right)f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ \qquad \text{also } =+, \text{ wenn } b > \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \text{ und } =-, \text{ wenn } b < \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Wir wollen den Raum von $-\infty$ bis $+\infty$ in kleinere Intervalle zerlegen, in welchen $\varphi''(u)$ jedesmal sein durch (14.) leicht zu bestimmendes Zeichen beibehält. Vorzeichen, die in (15.) und (16.) nicht bestimmt sind, haben wir in den nachfolgenden Tabellen durch ein Sternchen bezeichnet.

I. $b > \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

	1		2		3		4		5		6		7	
$u =$	$-\infty$	$c-\varepsilon$	$c+\varepsilon$	β	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	α	α	$a-\varepsilon$	$a+\varepsilon$	$+\infty$
$\varphi =$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	*	*	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\varphi' =$	$-$	$-$	$-$	*	*	$+$	$+$	$-$	$-$	*	*	$+$	$+$	$+$
$\varphi'' =$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

Nach dem Lemma ist also in den Intervallen (1.) und (7.) keine Wurzel, in den Intervallen (2.), (5.) und (6.) je eine, wie man auch die unbestimmt gelassenen Vorzeichen wählen mag; in (3.) höchstens eine, ebenso in (4.), also in dem Gesammtintervalle von β bis b (vorausgesetzt, dass $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ selbst keine Wurzel ist) keine, eine oder zwei Wurzeln, da aber $\varphi(\beta)$ und $\varphi(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist genau *eine* Wurzel vorhanden. Ist jedoch $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ eine Wurzel, so kann es, weil $\varphi'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$, nur eine einfache sein. Dann gestaltet sich das Schema für beide Intervalle also:

	3		4	
$u =$	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	$b-\varepsilon$
$\varphi =$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\varphi' =$	*	$+$	$+$	$-$
$\varphi'' =$	$+$	$+$	$-$	$-$

Beide Intervalle enthalten demnach keine Wurzeln und das Gesammtintervall von β bis b nur *eine* Wurzel $=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, wie oben.

II. $b < \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Auch hier sind 7 Intervalle zu unterscheiden, von denen (1.), (2.), (6.), (7.) mit den obigen identisch sind; die drei übrigen sind

	3		4		5	
$u =$	β	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	α
$\varphi =$	$-$	$+$	$+$	*	*	$-$
$\varphi' =$	*	$+$	$+$	$-$	$-$	*
$\varphi'' =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

demnach ist in (3.) eine Wurzel, in (4.)+(5.) zusammen eine, und der Fall, dass $\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$, erledigt sich wie oben.

III. $b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; $\varphi''(u)=-(u-a)(u-c)$ ist zwischen a und c positiv, sonst negativ; man hat die Intervalle $-\infty$ bis $c-\varepsilon$, $c+\varepsilon$ bis $b-\varepsilon$, $b+\varepsilon$ bis $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ bis $+\infty$ zu unterscheiden, von denen (1.) und (4.) mit den früheren (1.) und (7.) identisch sind und keine Wurzeln enthalten, die beiden übrigen geben

$u =$	$c+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$a-\varepsilon$
$\varphi =$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\varphi' =$	$-$	*	*	$+$
$\varphi'' =$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ein jedes Intervall kann somit höchstens zwei Wurzeln enthalten, und enthält sie auch wirklich, weil $\varphi(c)=+$, $\varphi(\beta)=-$, $\varphi(b)=+$, $\varphi(\alpha)=-$, $\varphi(a)=+$. Wir haben somit das Resultat:

Die Gleichung $\varphi(u)=0$ oder (10.) hat vier und nicht mehr reelle Wurzeln je eine zwischen c und β, β und b, b und α, α und a, und jede derselben ist eine einfache.

Anmerkung. Die Gleichung $\varphi(u)=0$ verdiente vielleicht auch nach anderen Beziehungen eine genauere Discussion. Im ebenen Problem ist die

entsprechende Gleichung

$$2\left\{\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right\}-\left\{\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u-\alpha}\right\}^2 = 0,$$

für welche die obigen Resultate sich auf die verschiedenartigste Weise ableiten lassen, eine solche, deren Invariante zweiter Dimension (die Grösse J in der Note zu §. 1) verschwindet. Drückt man dieselben durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 aus, so heisst dies $\Sigma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2=0$; eine Relation, die bei einer biquadratischen Gleichung mit reellen Coefficienten nur bestehen kann, wenn zwei der Wurzeln reell und zwei imaginär sind. Dieselbe Invariante verschwindet auch für die den vierten Grad nicht übersteigende Gleichung

$$2\left(\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right)-\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}\right)^2 = 0.$$

§. 4.

Nennt man die Wurzeln von $\varphi(u)=0$ nach aufsteigender Grösse geordnet u_1, u_2, u_3, u_4 und die zugehörigen durch die Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{2}{u-v} = \frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}$$

definirten Werthe von v bezüglich v_1, v_2, v_3, v_4, so sind, da für $u=-\infty$, $v=+\infty$, beim Wachsen von u also zuerst ein Abnehmen von v stattfindet, v_1 und v_3 offenbar Minima, v_2 und v_4 Maxima, und man hat

$$(17.)\qquad \begin{cases} v_1<v_2,\ v_3<v_2,\ v_3<v_4, \text{ so wie zufolge (9.)} \\ v_1<\beta,\ v_2>\beta,\ v_3<\alpha,\ v_4>\alpha, \text{ also } v_4>v_1. \end{cases}$$

Trägt man auf der gegebenen Normale mit Berücksichtigung des Zeichens vom Fusspunkte (x_0, y_0, z_0) aus die Strecken $\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\beta}{n}$, $\frac{v_1}{n}$, $\frac{v_2}{n}$, $\frac{v_3}{n}$, $\frac{v_4}{n}$ ab (cf. §. 1) und nennt die Endpunkte der Strecken (α), (β), (v_1) u. s. w., so haben nach (17.) diese Punkte folgende Lage:

$$(-\infty)\ (v_1)\ (\beta)\ (v_2)\ (+\infty);$$
$$(-\infty)\ (v_3)\ (\alpha)\ (v_4)\ +\infty;$$
$$(-\infty)\ (v_3)\ (v_2)\ (+\infty);$$
$$(-\infty)\ (v_1)\ (v_4)\ (+\infty).$$

Namentlich aber können die Punkte (v_1), (v_2), (v_3), (v_4), welche die nach beiden Seiten unendliche Normale in fünf Stücke zerlegen, nur eine der fol-

genden vier Lagen haben:

$$(17.^*)\quad \begin{cases} (-\infty)\ (v_1)\ (v_3)\ (v_2)\ (v_4)\ (+\infty) \qquad (-\infty)\ (v_3)\ (v_1)\ (v_4)\ (v_2)\ (+\infty) \\ (-\infty)\ (v_1)\ (v_3)\ (v_4)\ (v_2)\ (+\infty) \qquad (-\infty)\ (v_3)\ (v_1)\ (v_2)\ (v_4)\ (+\infty). \end{cases}$$

Die Strecken $\overline{(v_1)(v_2)}$ und $\overline{(v_3)(v_4)}$ fallen also entweder zum Theil auf einander, oder die eine liegt in der anderen.

Während u von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, geht v continuirlich von $+\infty$ bis v_1, von v_1 nach v_2, von v_2 nach v_3, von v_3 nach v_4, von v_4 nach $-\infty$. Verfolgt man diese Bewegung in jeder der obigen vier Anordnungen (17.*), so sieht man, dass der Endpunkt (v) der Strecke $\frac{v}{\pi}$ jedesmal die beiden äussersten (nur nach einer Seite begrenzten) Theile der Normale einmal, die ihnen angrenzenden dreimal, den mittelsten fünfmal durchläuft.

Uebertragen wir dies auf die vorliegende Aufgabe, so heisst dies: von einem Punkte (ξ, η, ζ) der gegebenen Normale lassen sich noch fünf, drei oder eine Normale an das Ellipsoid legen, je nachdem der Punkt (ξ, η, ζ) auf beiden Strecken $\overline{(v_1)(v_2)}$, $\overline{(v_3)(v_4)}$, oder nur auf einer, oder auf keiner liegt.

Mit Hülfe einiger das Ellipsoid betreffende Formeln lässt sich dieses Resultat einfach ausdrücken; wir wollen dieselben jetzt zusammenstellen.

§. 5.

Sind α und β die Quadrate der Halbaxen des der Tangentialebene im Punkte (x_0, y_0, z_0) des Ellipsoides parallelen Diametralschnittes, so ist

$$(4.^*)\quad x_0^2 = \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\quad y_0^2 = \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)},\quad z_0^2 = \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}.$$

Die Hauptkrümmungsradien sind $\frac{\alpha}{\pi}$ und $\frac{\beta}{\pi}$ (und beiläufig $\pi^2\alpha\beta = abc$). Ist (X, Y, Z) der zugehörige Krümmungsmittelpunkt, so hat man:

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}} = -\alpha \text{ oder } = -\beta; \text{ und hieraus}$$

$$(18.)\quad X^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)},\quad Y^2 = \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)},\quad Z^2 = \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)},$$

wo entweder $u = \alpha$, $w = \beta$ oder $u = \beta$, $w = \alpha$ zu setzen ist. Giebt man aber u alle möglichen Werthe von a bis b, und w gleichzeitig alle Werthe von b bis c, so ist der Ort des Punktes (X, Y, Z) eine Fläche F_1 (der Ort der Mittelpunkte der grösseren Hauptkrümmungskreise), und wenn man die Inter-

valle für u und w vertauscht, so ist der Ort eine zweite Fläche F_2, welche die Centra der kleinen Hauptkrümmungskreise enthält; F_1 und F_2 können als Theile *einer* Fläche angesehen werden, deren Gleichung durch Elimination von u und w aus (18.) erhalten wird, die Fläche der Krümmungsmittelpunkte. Jede durch den Anfangspunkt gezogene Grade trifft F_1 in zwei zu diesem symmetrisch gelegenen Punkten und eben so F_2. Denn soll $X:Y:Z = l:m:n$ sein, so sind u und w durch die Gleichung bestimmt:

$$(19.) \qquad l^2 : m^2 : n^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)} : \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)} : \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)},$$

woraus

$$(20.) \qquad \frac{al^2}{(a-u)^3} + \frac{bm^2}{(b-u)^3} + \frac{cn^2}{(c-u)^3} = 0,$$

welche Gleichung nach bekannter Schlussfolge nur zwei reelle Wurzeln, eine zwischen a und b, und eine zweite zwischen b und c enthält. Aus (19.) folgt für jedes reelle u zwischen a und b (b und c) ein reelles w zwischen b und c (a und b). Demnach sind F_1 und F_2 geschlossene Flächen.

Wir wollen jetzt die Durchschnitte der Normale des Ellipsoids am Punkte (x_0, y_0, z_0) mit den Flächen F_1 und F_2 bestimmen. Es seien X, Y, Z die Coordinaten eines Durchschnittes, so müssen ausser (18.) noch die Gleichungen

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}} = -v$$

stattfinden. Substituirt man die hieraus sich ergebenden Werthe von X, Y, Z in (18.), so werden u, w, v durch die Gleichungen bestimmt:

$$(21.) \qquad \begin{cases} (a-u)^3(a-w) = (a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta), \\ (b-u)^3(b-w) = (b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta), \\ (c-u)^3(c-w) = (c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta). \end{cases}$$

Die Annahme $u=a$ giebt $v=a$, und aus den beiden anderen Gleichungen in (21.)

$$-w = a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{b-a}, \quad -w = a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{c-a},$$

was, weil $a-\alpha$, $a-\beta$ von Null verschieden sind, auf einen Widerspruch führt; eben so wenig kann $u=b$ oder $=c$ sein. Wir können demnach aus (21.) die beiden Gleichungen ableiten:

$$(22.)\quad \frac{(a-v)^2}{(a-u)^2}\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2}{(b-u)^2}\frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-v)^2}{(c-u)^2}\frac{(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}-1=0,$$

$$(23.)\quad \frac{(a-v)^2}{(a-u)^3}\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2}{(b-u)^3}\frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-v)^2}{(c-u)^3}\frac{(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}=0.$$

Umgekehrt lassen sich aus den beiden Gleichungen (22.) und (23.) die drei Gleichungen (21.) ableiten; denn drei beliebige Grössen γ, γ', γ'' können, wenn $(a-b)(a-c)(b-c)\gtrless 0$, immer unter die Form gebracht werden:

$$\gamma=\varepsilon+\varepsilon'a+\varepsilon''a^2,\quad \gamma'=\varepsilon+\varepsilon'b+\varepsilon''b^2,\quad \gamma''=\varepsilon+\varepsilon'c+\varepsilon''c^2.$$

Schreibt man statt (22.) und (23.)

$$\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}+\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}=1$$

und

$$\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{a-u}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{b-u}+\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}\frac{1}{c-u}=0,$$

und substituirt für γ $\varepsilon+\varepsilon'a+\varepsilon''a^2$ u. s. w., so ergiebt sich erstens, dass $\varepsilon''=1$, und zweitens, dass $\varepsilon+\varepsilon't+t^2$ den Factor $t-u$ enthält, also gleich $(t-u)(t-w)$ gesetzt werden kann; demnach ist $\gamma=(a-u)(a-w)$ u. s. w. Erwägt man, dass, wenn z_1 die ganze Function $F(z)$ nicht verschwinden lässt, z_1 eine doppelte Wurzel von $f(z)=0$ ist, sobald es den Gleichungen $\frac{f(z)}{F(z)}=0$, $\frac{d\frac{f(z)}{F(z)}}{dz}=0$ genügt, so sieht man, dass für v nur solche Werthe zu nehmen sind, die der Gleichung (22.) eine Doppelwurzel verschaffen, und für u diese Wurzel selbst, mit Ausschluss von $u=a$, $=b$ und $=c$. Nun ist Gleichung (22.) keine andere als (5.); und nach den Rechnungen in §. 1 und §. 2 kann man für dieselbe schreiben:

$$\frac{(u-v)^2(u-\alpha)(u-\beta)}{(u-a)(u-b)(u-c)}\left\{\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v}\right\}=0,$$

oder

$$\frac{(u-v)}{(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2}\{W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)\}=0.$$

Die Werthe von v, welche dieser Gleichung eine Doppelwurzel verschaffen, machen entweder $u=v$, und dann sind sie (wiederum mit Ausschluss von a, b und c) $=\alpha$ und $=\beta$, oder sie geben dem anderen Factor eine Doppelwurzel, und dann hat man für diese

$$\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v} = 0,$$
$$\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}-\frac{2}{(u-v)^2} = 0;$$

man kommt also auf die behandelte Gleichung (10.) wieder zurück *). Somit haben die Gleichungen (22.) und (23.) nur folgende sechs Lösungen:

$$v = \beta \quad v_1 \quad v_2 \quad \alpha \quad v_3 \quad v_4$$
$$u = \beta \quad u_1 \quad u_2 \quad \alpha \quad u_3 \quad u_4.$$

Zu jedem Werthepaare von v und u bestimmt sich aus (21.) ein reelles w, das zwischen a und b liegt, wenn u zwischen b und c liegt und umgekehrt. Die Normale am Punkte (x_0, y_0, z_0) des Ellipsoides hat also mit der Fläche F_1 die drei in §. 4 mit (α), (v_3), (v_4) bezeichneten Punkte gemeinschaftlich, und mit F_2 die Punkte (β), (v_1), (v_2). Dass die Normale mit jeder der geschlossenen Flächen F_1, F_2 eine ungrade Anzahl von Punkten gemeinschaftlich hat, erklärt sich daraus, dass sie F_1 in (α), F_2 in (β) berührt. Wenn man den Beweis dafür analytisch führen will, so kann man entweder auf die Formeln (18.) zurückgehen, oder es unmittelbar daraus schliessen, dass die Discriminante von (5.) oder von

$$(u-v)\{W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)\} = v$$

offenbar die *quadratischen* Factoren $(v-\alpha)^2$, $(v-\beta)^2$ enthält. Da für die vorliegende Untersuchung dieser Umstand aber ohne Bedeutung ist, so gehen wir auf diesen Beweis nicht näher ein.

Die Resultate des §. 4 lassen sich demnach folgendermaassen aussprechen:

Eine nicht in einem Hauptschnitte des Ellipsoides liegende Normale trifft jeden der beiden Theile F_1, F_2 der Fläche der Krümmungsmittelpunkte, abgesehen von den beiden Krümmungsmittelpunkten (α) und (β), welche zum Fusspunkte der Normalen gehören, in noch zwei Punkten (v_3), (v_4) und (v_1), (v_2). Die beiden von den Normalen in F_1 und F_2 bestimmten Sehnen enthalten jede *eines* der Centra (α), (β) und sind durch keinen endlichen Raum von einander getrennt, d. h. die eine liegt zum Theil oder ganz in der anderen. Ferner:

Von einem Punkte lassen sich an ein Ellipsoid sechs, vier oder zwei Normalen ziehen, je nachdem er innerhalb beider Theile F_1 und F_2 der Fläche

---

*) Man hätte diese Betrachtungen mit Hülfe der Curve, welche (22.) oder (5.) repräsentirt und die aus einer parabolischen Curve fünften Grades und einer Graden besteht, wenn u und v als Coordinaten angesehen werden, abkürzen können.

der Krümmungsmittelpunkte, oder innerhalb des einen und ausserhalb des anderen, oder ausserhalb beider liegt.

Anmerkung. Zum vollständigen Beweise dieses Resultates gehört noch die Betrachtung des Falles, dass der gegebene Punkt in einer Hauptebene liegt.

Die (xy) Ebene schneidet die beiden Flächen F_1 und F_2 in der Curve

$$(24.)\qquad (ax^2)^{\frac{1}{3}}+(by^2)^{\frac{1}{3}} = (a-b)^{\frac{1}{3}},$$

$$(25.)\qquad \frac{ax^2}{(a-c)^2}+\frac{by^2}{(b-c)^2} = 1.$$

Von den Fusspunkten der sechs durch $(\xi\eta)$ gehenden Normalen liegen vier in der (xy) Ebene, und ihre Realität hängt davon ab, ob $(\xi\eta)$ innerhalb (24.) liegt oder nicht; die beiden anderen ausserhalb der (xy) Ebene, und ihre Realität hängt davon ab, ob $(\xi\eta)$ innerhalb (25.) liegt oder nicht. Die Combination beider Resultate zeigt die Richtigkeit des Hauptsatzes für diesen speciellen Fall.

Von den beiden Curven, der Ellipsenevolute und einer Ellipse, aus welchen die Durchschnitte von F_1 und F_2 mit den Coordinatenebenen bestehen, gehört zu F_1 in dem einen Hauptschnitte die Evolute, in dem anderen die Ellipse, in dem dritten ein Theil der Evoluten und ein Theil der Ellipse, ebenso ist es mit F_2.

Breslau, im Januar 1861 *).

---

*) Noch ehe diese Abhandlung in die Oeffentlichkeit gelangt ist, hat ein frühzeitiger Tod am 5. d. M. ihren scharfsinnigen Verfasser aus der Mitte seiner Laufbahn fortgerafft.

Die Grösse des Verlustes, den die Wissenschaft durch seinen Tod erleidet, wissen die Leser dieser Zeitschrift zu ermessen, die ihn aus einer Reihe von Abhandlungen als vielseitigen Forscher in den verschiedensten Theilen der Analysis und vor Allem in ihrer Anwendung auf die Geometrie kennen. Er begnügte sich nicht, die Fragen, die er behandelte, durch Hinzufügung einzelner neuer Thatsachen und Ergebnisse zu fördern, sondern ging überall bis zu den einfachsten Gründen zurück und suchte so zwischen vereinzelten Ergebnissen einen Zusammenhang aufzufinden. In dieser auf das Ganze gerichteten Thätigkeit seines klaren Geistes lag die seltene Lehrergabe, die ihn auszeichnete, und die seinen Tod für den mathematischen Unterricht zu einem ebenso beklagenswerthen Ereigniss macht, wie für die mathematische Literatur.

Berlin, im April 1861. *B.*

Ueber Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

---

§. 1.

Von einigen Curven, welche in der Theorie der Curven vierter Ordnung zu betrachten sind.

Die Theorie der Curven n^{ter} Ordnung knüpft sich naturgemäss an die der Curven niedrigerer Ordnungen an; bildet man die verschiedenen Polaren, und die Grundformen derselben, so sind dies auch Grundformen der Curven n^{ter} Ordnung, d. h. solche Formen, welche durch eine Transformation der Coordinaten wiederum in die frühere Gestalt übergehen, multiplicirt mit einer Potenz der Transformationsdeterminante.

Die Grundformen, welche man so erhält, sind sehr verschiedener Art. So geben die Invarianten der ersten Polare Covarianten der ursprünglichen Function; die zugehörigen Formen geben Zwischenformen; die Covarianten aber eine Art von Grundformen, welche sich von eigentlichen Covarianten dadurch unterscheidet, dass sie gleichzeitig in Bezug auf die Coordinaten *zweier* Punkte homogen sind.

Da unter solchen Grundformen für die Geometrie vor Allem die eigentlichen Covarianten von Bedeutung sein werden, so wird man zunächst den Satz benutzen, dessen Richtigkeit an sich deutlich ist:

Die Invarianten der verschiedenen Polaren sind Covarianten der ursprünglichen Function.

Wenn man dies z. B. auf die Curven vierter Ordnung anwendet, zeigt sich zunächst die erste Polare, welche eine Curve dritter Ordnung ist. Diese hat zwei Invarianten S, T, nebst der in vieler Hinsicht merkwürdigen Verbindung derselben $R = T^2 - S^3$. Man hat also hiernach für die Curven vierter Ordnung die Covarianten S von der vierten, T von der sechsten, R von der zwölften Ordnung. Die Curven $S = 0$, $T = 0$, $R = 0$ sind daher Fundamentalcurven für die Betrachtung der Curven vierter Ordnung. Die geometrische Bedeutung derselben ist leicht ersichtlich. Die Curve, welche entsteht, wenn man die Determinante der Polare gleich Null setzt, und welche im Folgenden eine grosse Rolle spielt, mag der Kürze wegen Polardeterminante genannt werden. Die Curve S ist dann, nach der Theorie der Curven dritter Ord-

nung, der Ort derjenigen Pole, deren Polardeterminante sich in ein Dreieck auflöst; oder, wie ich an einem anderen Orte gezeigt habe, bei denen die Wendetangenten der Polaren sich zu dreien in drei Punkten begegnen. Ferner ist T der Ort derjenigen Pole, deren Polaren mit ihren Polardeterminanten in dem Reciprocitätsverhältniss stehen, dass die Wendetangenten der einen immer die anderen berühren. Die Curve $R=0$ aber ist der Ort der Pole, deren Polare einen Doppelpunkt hat; und der Ort dieses Doppelpunktes ist dann $\Delta=0$, eine Curve sechster Ordnung, welche durch die Wendepunkte der Curve vierter Ordnung geht, und zugleich die Invariante der zweiten Polaren ist.

Mit diesen Formen ist der Kreis der Covarianten zunächst abgeschlossen.

Ueber die letzterwähnten Ortscurven hat Herr *Steiner* (dieses Journal Bd. 47, pag. 4) einige merkwürdige Sätze bekannt gemacht, auf Curven ganz beliebigen Grades bezüglich. Wenn auch der vollständige Beweis jener Sätze die Kräfte der Analysis noch zu überschreiten scheint, so wird man doch im Folgenden, nebst anderen Sätzen, auch einige derjenigen bewiesen finden, welche Herr *Steiner* dort angeführt hat.

§. 2.

Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Polaren bei algebraischen Curven im Allgemeinen.

Es sei $u=0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, und

$$u_i=\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad u_{ik}=\frac{1}{n.n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k},\quad \text{etc.}$$

Ist dann y ein Punkt, dessen Coordinaten y_1, y_2, y_3 sind, so ist die Gleichung seiner Polare

$$v=y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3=0.$$

Die Wendepunkte dieser Curve findet man, indem man x in $x+\lambda.z$ übergehen lässt, wodurch v in

$$[v]\;=\;v+n\lambda.Dv+\frac{n.n-1}{1.2}\lambda^2D^2v+\cdots$$

übergeht, und dann die Bestimmung trifft, dass D^2v in zwei lineare Factoren

$$\alpha.\beta\;=\;(\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\alpha_3z_3)(\beta_1z_1+\beta_2z_2+\beta_3z_3)$$

zerfällt. Hierdurch erhält man die sechs Gleichungen

$$(1.)\qquad y_1u_{1ik}+y_2u_{2ik}+y_3u_{3ik}\;=\;\alpha_i\beta_k+\beta_i\alpha_k.$$

Diese Gleichungen drücken zunächst nur aus, dass y auf der Polardeterminante von y liege. Fügt man noch die Bedingung hinzu

$$(2.)\qquad \alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

welche mit der Bedingung $v = 0$ übereinkommt, so wird x ein Wendepunkt der Polaren, und α wird die Wendetangente.

Die Gleichungen (1.), (2.) schliessen bereits einige geometrische Resultate ein. Eliminirt man aus (1.) die α, β, so erhält man die Polardeterminante

$$(3.)\; 0 = \Delta_v = \begin{vmatrix} y_1 u_{111} + y_2 u_{211} + y_3 u_{311}, & y_1 u_{112} + y_2 u_{212} + y_3 u_{312}, & y_1 u_{113} + y_2 u_{213} + y_3 u_{313} \\ y_1 u_{112} + y_2 u_{212} + y_3 u_{312}, & y_1 u_{122} + y_2 u_{222} + y_3 u_{322}, & y_1 u_{123} + y_2 u_{223} + y_3 u_{323} \\ y_1 u_{113} + y_2 u_{213} + y_3 u_{313}, & y_1 u_{123} + y_2 u_{223} + y_3 u_{323}, & y_1 u_{133} + y_2 u_{233} + y_3 u_{333} \end{vmatrix}.$$

Verbindet man dies mit der Gleichung $v = 0$, so ergiebt sich der Satz:

Es giebt immer drei verschiedene Pole, deren Polaren in einem gegebenen Punkte einen Wendepunkt haben.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (1.) die y und die β, so ist das Eliminationsresultat eine Determinante, welche nach Herrn *Aronhold* durch $S_u = 0$ bezeichnet werden kann. (Vgl. dieses Journal Bd. 55, pag. 189.) Die Coefficienten α, welche die Gleichungen der drei entsprechenden Wendetangenten bestimmen, erhält man daher direct aus den Gleichungen:

$$(4.)\qquad S_u = 0, \qquad \alpha = 0,$$

deren erste vom dritten Grade ist.

Rückt der Pol auf einer Curve $\varphi(y) = 0$ fort, so beschreiben die Wendepunkte der Polare eine Curve, welche durch Elimination der y aus $v = 0$, $\Delta_v = 0$, $\varphi = 0$ erhalten wird. Ist diese Curve insbesondere eine Gerade

$$(5.)\qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0,$$

und setzt man für den Augenblick

$$(6.)\qquad \Delta_v = \psi(y_1, y_2, y_3),$$

so ist das Resultat der Elimination, wie man sogleich sieht:

$$(7.)\qquad 0 = \psi\{c_2 u_3 - c_3 u_2,\; c_3 u_1 - c_1 u_3,\; c_1 u_2 - c_2 u_1\}.$$

Wenn also der Pol eine Gerade beschreibt, so beschreiben die Wendepunkte der Polare eine Curve der $6(n-2)^{ten}$ Ordnung. Sämmtliche Polaren, deren Pole auf der Geraden liegen, schneiden sich aber in $(n-1)^2$ Punkten, den

Lösungen der Gleichungen

$$u_1 = \lambda c_1, \quad u_2 = \lambda c_2, \quad u_3 = \lambda c_3.$$

Diese $(n-1)^2$ *Punkte sind dreifache Punkte der Curve* (7.) *).

Betrachtet man in (7.) *die* x *als constant, die* c *als veränderlich, so ist* $\psi = 0$ *das Product dreier linearen Factoren, welche die Gleichungen der obengedachten drei Pole sind, deren Polaren* x *zum Wendepunkt haben.* U. s. w.

Soll nun insbesondere die Polare einen Doppelpunkt haben, so müssen gleichzeitig die Gleichungen bestehen (vgl. (1.), (2.)):

$$(8.)\quad \begin{cases} y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Es ist dann x der Doppelpunkt, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ sind die beiden Tangenten desselben, y ist der zugehörige Pol. Indem man aus diesen Gleichungen die x, α, β eliminirt, erhält man die Gleichung der Curve, auf welcher die Pole aller mit einem Doppelpunkt versehenen Polaren liegen. Sie mag durch $R = 0$ bezeichnet sein. Eliminirt man hingegen die y, α, β, so gelangt man zu der Ortscurve der Doppelpunkte. Die Gleichung derselben ist die bekannte *Hesse*sche Determinante, gleich Null gesetzt. Denn multiplicirt man die erste Gleichung (8.) mit x_k und summirt nach k, so kommt

$$(9.)\quad \begin{cases} y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0, \\ y_1 u_{12} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0, \\ y_1 u_{13} + y_2 u_{23} + y_3 u_{33} = 0, \end{cases}$$

woraus sich durch Elimination der y sofort ergiebt:

$$\Delta_u = 0.$$

Eliminirt man endlich die x, y, β, so erhält man die Gleichung derjenigen Curve, welche von den Tangenten des Doppelpunktes umhüllt wird.

Die beiden Curven $R = 0$, $\Delta_u = 0$ hat Herr *Steiner* im Zusammenhange betrachtet, und conjugirte Kerncurven der Curve $u = 0$ genannt. Von den Sätzen, welche Herr Steiner dort anführt, hebe ich nur zwei hervor, um sie analytisch zu begründen:

---

*) *Wenn die Gerade eine Curve* $f^{(m)}(c_1, c_2, c_3) = 0$ *umhüllt, so beschreiben die Schnittpunkte der Polaren also die Curve* $m(n-1)^{ter}$ *Ordnung* $f(u_1, u_2, u_3) = 0$. *Dreht sich insbesondere die Gerade um einen Punkt* ξ, *so ist die beschriebene Curve die Polare von* ξ. Herr *Steiner* hat die $(n-1)^2$ Punkte Polare der Geraden genannt.

So wie bekanntlich die Curve $\Delta_u=0$ durch die Wendepunkte von $u=0$ hindurchgeht, ebenso berührt $R=0$ sämmtliche Wendetangenten.

Zu diesem Zweck braucht man nur die Gleichung

$$(10.)\qquad y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3 = 0$$

zu differentiiren, um mit Hülfe von (9.) einzusehen, dass auch

$$dy_1.u_1+dy_2.u_2+dy_3.u_3 = 0$$

ist. Daher ist (10.) die Gleichung der Tangente für die Curve $R=0$ im Pole y von x, sobald man statt der y die laufenden Coordinaten setzt. Ist nun aber insbesondere x ein Wendepunkt, so ist (10.) auch die Gleichung der Wendetangente, diese berührt also auch $R=0$.

Ferner:

Zwei Pole, deren Polaren einander berühren, liegen immer auf einer Tangente von $R=0$; und zwar berühren sich die Polaren aller auf einer solchen Tangente gelegenen Pole in einem Punkte, dem Doppelpunkt x, welchen die Polare des Berührungspunktes y der Tangente enthält; die gemeinsame Tangente aller Polaren ist aber die Verbindungslinie von x und y.

Sollen nämlich z, t zwei Punkte sein, deren Polaren

$$z_1u_1+z_2u_2+z_3u_3=0,\qquad t_1u_1+t_2u_2+t_3u_3=0$$

sich berühren, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(11.)\qquad z_1u_{1i}+z_2u_{2i}+z_3u_{3i} = \mu(t_1u_{1i}+t_2u_{2i}+t_3u_{3i}).$$

Setzt man also

$$y_h = z_h+\mu t_h,$$

so hat man die Gleichungen (9.) vor sich; die Verbindungslinie von z, t enthält also einen Punkt von $R=0$, und ist Tangente in diesem Punkt, da die Gleichung der Tangente (10.)

$$Y_1u_1+Y_2u_2+Y_3u_3 = 0$$

für $Y=z$ und $Y=t$ erfüllt ist. Der Berührungspunkt der beiden Polaren ist aber nach (11.) der zu y gehörige Doppelpunkt x; und in demselben berühren sich also alle Polaren, welche Punkten der Tangente in y angehören. Endlich ist die Gleichung der gemeinsamen Berührungstangente

$$X_1(z_1u_{11}+z_2u_{12}+z_3u_{13})+X_2(z_1u_{21}+z_2u_{22}+z_3u_{23})+X_3(z_1u_{31}+z_2u_{32}+z_3u_{33})=0.$$

Da diese Gleichung durch $X=x$ und $X=y$ erfüllt ist, so stellt sie die Verbindungslinie des Pols mit seinem Doppelpunkt dar.

Der erste dieser beiden Sätze (aus denen sich einige andere von Herrn *Steiner* angegebene ohne Weiteres ableiten lassen) giebt als speciellen Fall einen Satz, den ich an einem anderen Orte aus einem ganz anderen Standpunkte bewiesen habe. Da nämlich für die Curve dritter Ordnung $\Delta = 0$ und $R = 0$ zusammenfallen, so folgt, dass die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung sämmtlich die Curve $\Delta = 0$ berühren, welche durch die Wendepunkte hindurchgeht.

Ich bemerke noch zwei Eliminationsprobleme, welche sich bei diesen Untersuchungen aufdrängen.

Die Darstellung der Curve $R = 0$ in Liniencoordinaten führt auf die Elimination der x aus den Gleichungen

$$u_1 = \beta_1, \quad u_2 = \beta_2, \quad u_3 = \beta_3, \quad \Delta_u = 0.$$

Die Darstellung der Curve aber, welche von der Verbindungslinie x, y des Doppelpunktes mit seinem Pol umhüllt wird, fordert die Elimination der x aus den Gleichungen

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0, \quad \Delta_u = 0,$$
$$\Sigma \beta_i \beta_k U_{ik} = 0.$$

Die letzte Gleichung, in welcher die U_{ik} Unterdeterminanten von Δ bezeichnen, folgt leicht aus der Verbindung von

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 = 0$$

mit den Gleichungen (9.).

Es kann endlich nach denjenigen Polen gefragt werden, deren Polaren einen Rückkehrpunkt enthalten. Für solche Pole müssen nicht nur die Gleichungen (8.) fortbestehen, sondern es müssen auch die beiden Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen, so dass die α den β gleich werden. Man hat also die Gleichungen:

$$(12.) \quad \begin{cases} y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = 2\alpha_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die y, x, α bestimmt, und zwar enthalten die Gleichungen auch eine genügende Anzahl von Unbekannten. Es ist aber leicht zu zeigen, aus welchen Gleichungen insbesondere die x zu finden sind. Denn aus der Theorie der Curven dritter Ordnung geht hervor (wie man z. B. durch einfache Anwendung der *Hesse*schen Form findet), dass, die u_{ikh} wie Constante betrachtet, das Resultat der Elimination der α, y aus den sechs Gleichungen,

welche die erste Gleichung (12.) darstellt, kein Anderes ist als

$$S = 0.$$

Bezeichnet man also durch S überhaupt die Covariante, welche entsteht, sobald man in S die Coefficienten nicht mehr Constante, sondern die oben durch u_{ikh} bezeichneten Grössen bedeuten lässt, so zeigt sich, dass die Rückkehrpunkte der Polaren sämmtlich auf der Curve $4(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $S=0$ liegen. Ausserdem aber liegen sie, wie alle Doppelpunkte, auf $\Delta=0$. Und daraus folgt der merkwürdige Satz:

Die Rückkehrpunkte der Polaren sind die $12(n-2)(n-3)$ *Schnittpunkte der Curven* $S=0$, $\Delta_u=0$.

Herr *Steiner* hat eben dieselbe Anzahl für die Rückkehrpunkte der Curve $R=0$ gefunden; was darauf hinzudeuten scheint, dass die Pole der Polaren mit Rückkehrpunkten auch Rückkehrpunkte der Curve $R=0$ sind. Dies ist in der That bei den Curven vierter Ordnung der Fall, wie man weiter unten sehen wird.

§. 3.

Anwendung auf die Curven vierter Ordnung. Eigenschaften der Polardeterminanten.

Man bemerkt, dass die vorliegenden Resultate wesentlich auf den Gleichungen (1.) beruhen. Ist aber u eine homogene Function der vierten Ordnung, so haben diese Gleichungen die besondere Eigenschaft, sich nicht zu verändern, wenn man die y mit den x vertauscht. Hieraus ergeben sich einige Resultate, welche der Reihe nach angedeutet werden mögen.

Da die Polardeterminante die Determinante der linken Seite von (1.) ist, so bleibt auch sie unverändert, wenn man y mit x vertauscht. Daraus folgt:

Wenn y auf der Polardeterminante von x liegt, so liegt auch x auf der Polardeterminante von y.

(Die Polardeterminante geht zugleich durch den Pol, nur wenn der Pol auf der Determinante von u liegt. *Man kann daher die Determinante auch als den Ort derjenigen Pole auffassen, welche zugleich auf ihrer Polardeterminante liegen.*)

Wenn man also die Polardeterminanten zu zwei unendlich nahen Punkten einer Geraden aufsucht, so berühren die Polardeterminanten der neun Punkte, in welchen jene sich schneiden, die Gerade in dem Orte, von welchem man ausging.

Rückt daher der Pol auf einer Curve fort, so umhüllt die Polardeterminante eine andere Curve; wenn aber umgekehrt der Pol auf der letzteren fortrückt, so umhüllt die Polardeterminante die erstere.

Bezeichnet man die Polardeterminante durch

$$\Delta_{u} = \psi(x_1, x_2, x_3;\, y_1, y_2, y_3),$$

und rückt der Pol y auf der Curve $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ fort, so wird der Schnittpunkt x zweier nächsten Polardeterminanten gefunden, indem man gleichzeitig diese Gleichungen für benachbarte Werthe der y bestehen lässt, so dass

$$\begin{aligned} \psi' y_1 . dy_1 + \psi' y_2 . dy_2 + \psi' y_3 . dy_3 &= 0, \\ \varphi' y_1 . dy_1 + \varphi' y_2 . dy_2 + \varphi' y_3 . dy_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} \psi' y_1 &= \lambda \varphi' y_1, \\ \psi' y_2 &= \lambda \varphi' y_2, \\ \psi' y_3 &= \lambda \varphi' y_3. \end{aligned}$$

Fügt man hinzu

$$\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0,$$

so sind dies vier Gleichungen, aus welchen durch Elimination der y die gesuchte Umhüllungscurve hervorgeht.

Ist insbesondre φ vom ersten Grade, so sind diese Gleichungen genau dieselben, welche man anwendet, um die Curve $\psi = 0$ in Liniencoordinaten auszudrücken. Das Resultat ist bekanntlich dann (nach der Bezeichnung von Herrn *Aronhold*) $F_{\Delta_u} = 0$, diesen Ausdruck so gebildet, dass in Δ_u die y als die Veränderlichen gelten, und also aus F verschwinden; wo F dann vom sechsten Grad für die Coefficienten des linearen Ausdruckes φ, und vom vierten für die Coefficienten von ψ, mithin für die x vom zwölften Grade ist. Dies kann man in den Satz zusammenfassen:

Rückt der Pol auf der Geraden $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ fort, so umhüllt die Polardeterminante eine Curve zwölfter Ordnung, welche, die x als constant, die α als veränderlich betrachtet, die Polardeterminante von x in Liniencoordinaten darstellt.

Nach einer Formel von Herrn *Cayley*, welche Herr *Aronhold* anführt (d. J. Bd. 55, p. 187) ist aber

$$3F_{\Delta_u} = -3S^2 . F_u - 4T . S_u^2 + 6S . S_u T_u,$$

wo die Ausdrücke rechts genau die in der Theorie der Curven dritter Ord-

nung so bezeichneten Functionen darstellen, nur dass statt der constanten Coefficienten immer die linearen Ausdrücke u_{ikh} eintreten. Durch blosse Betrachtung dieser Formel erkennt man:

Die Curve, welche von der Polardeterminante umhüllt wird, wenn der Pol die Gerade $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$ durchläuft, geht immer durch die nämlichen 24 Punkte, in denen sich die Curven

$$S = 0, \quad T = 0$$

durchschneiden, welche vom vierten und sechsten Grade sind; und hat ausserdem immer 12 Doppelpunkte, welche gleichfalls auf $S = 0$ und zugleich auf der Curve dritter Ordnung $S_u = 0$ liegen, welche von den Coefficienten α abhängig ist.

Es mögen sich hieran die folgenden Betrachtungen schliessen, welche die Bedeutung dieses Ausdrucks S_u ans Licht stellen. Aus den Gleichungen, als deren Determinante sich S_u für die beliebige Curve dritter Ordnung darstellt (die erste Gleichung (8.), wenn man die u_{ikh} als Coefficienten der Curve dritter Ordnung und die y und β als Eliminationsgrössen betrachtet, giebt dies System, vgl. bei Herrn *Aronhold*, a. a. O. p. 189), ergiebt sich für solche Curven der Satz:

Wenn ein Pol y sich auf der Determinante der Curve dritter Ordnung $u = 0$ bewegt, so zerfällt seine Polare in zwei Gerade, deren Schnittpunkt wieder auf der Determinante liegt; diese Geraden umhüllen eine Curve dritter Classe $S_u = 0$.

Für die Curven vierter Ordnung wird nun der Ausdruck

$$S_u = -6 \begin{vmatrix} u_{111} & u_{122} & u_{133} & 2u_{123} & 2u_{113} & 2u_{112} \\ u_{112} & u_{222} & u_{233} & 2u_{223} & 2u_{123} & 2u_{122} \\ u_{113} & u_{223} & u_{333} & 2u_{233} & 2u_{133} & 2u_{123} \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

eine Zwischenform, welche, gleich Null gesetzt, eine Curve dritter Ordnung oder dritter Classe bedeutet, jenachdem man die x oder die α als die Veränderlichen betrachtet. Dies giebt daher die folgenden beiden Sätze:

Wenn ein Punkt y auf der Polardeterminante von x fortrückt, so umhüllen die Geraden, in welche die Polare von y, in Bezug auf die Polare von x genommen, zerfällt, die Curve dritter Classe $S_u = 0$.

Die Punkte, deren Polare von einer gegebenen Linie $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ *in solchen drei Punkten geschnitten wird, dass die drei in den Schnittpunkten an die Polare gezogenen Tangenten sich in einem Punkt y begegnen, liegen auf der Curve dritter Ordnung* $S_u = 0$.

§. 4.

Von der Curve $S = 0$ und den Dreiecken, in welche die Polardeterminante zerfallen kann.

Wenn insbesondere der Pol der Curve $S = 0$ angehört, so zerfällt die Polardeterminante in drei Gerade. Es entsteht ganz natürlich die Frage, welche Curve von den Ecken dieser Dreiecke beschrieben, und welche Curve von den Seiten derselben umhüllt wird, während der Pol die ganze Curve $S = 0$ durchläuft.

Aus der Theorie der Curven dritter Ordnung folgt, dass wenn für eine solche Curve $S = 0$ ist, y aber eine Ecke des Dreiecks bedeutet, in welche die Polardeterminante zerfällt, und α_1, α_2, α_3 die Coordinaten der gegenüberliegenden Seite dieses Dreïecks bezeichnen, die Gleichungen bestehen:

$$(13.)\qquad y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = 2\alpha_i \alpha_k;$$

wie man dies leicht z. B. an der *Hesse*schen Form nachweist. Die angeregten Fragen kommen also darauf hinaus, die Gleichungen zu bestimmen, welche hervorgehen, indem man die x und die α, oder die x und die y aus diesen Gleichungen eliminirt. Aber die Gleichungen (13.) ändern sich nicht, wenn man die y mit den x vertauscht. Hieraus fliesst ohne Weiteres der Satz:

Wenn y eine Ecke des Dreiecks ist, in welches die Polardeterminante von x übergeht, so geht auch die Polardeterminante von y in ein Dreieck über, und eine Ecke desselben liegt in x, die gegenüberliegende Dreiecksseite aber ist in beiden Fällen dieselbe.

Die Ecken der Dreiecke beschreiben also gleichfalls die Curve $S = 0$, *und zwar gehört auf diese Weise jeder Punkt x von* $S = 0$ *zu drei Dreiecken; es sind dieses die Polardeterminanten der Ecken des zu x selbst gehörigen Dreiecks.*

Ferner aber kann man die Gleichungen (13.) als lineare Gleichungen ansehen, deren Unbekannte die sechs Grössen:

$$\begin{aligned} &y_1 x_1, \quad y_2 x_3 + y_3 x_2, \\ &y_2 x_2, \quad y_3 x_1 + y_1 x_3, \\ &y_3 x_3, \quad y_1 x_2 + y_2 x_1 \end{aligned}$$

sind. Löst man also diese Gleichungen auf, indem man durch $A_{mn,ik}$ die Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$(14.)\quad A = \begin{vmatrix} u_{1111} & u_{1122} & u_{1133} & u_{1123} & u_{1131} & u_{1112} \\ u_{2211} & u_{2222} & u_{2233} & u_{2223} & u_{2231} & u_{2212} \\ u_{3311} & u_{3322} & u_{3333} & u_{3323} & u_{3331} & u_{3312} \\ u_{2311} & u_{2322} & u_{2333} & u_{2323} & u_{2331} & u_{2312} \\ u_{3111} & u_{3122} & u_{3133} & u_{3123} & u_{3131} & u_{3112} \\ u_{1211} & u_{1222} & u_{1233} & u_{1223} & u_{1231} & u_{1212} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, so kommt

$$(15.)\quad A(x_m y_n + y_m x_n) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{ik,mn} \alpha_i \alpha_k.$$

In diesen Formeln ist

$$(16.)\quad \begin{cases} A_{ik,mn} = A_{ki,mn} = A_{ik,nm} = A_{ki,nm} \\ = A_{mn,ik} = A_{mn,ki} = A_{nm,ik} = A_{nm,ki}. \end{cases}$$

Dagegen sind von diesen Grössen im Allgemeinen verschieden diejenigen Systeme, welche aus

$$A_{im,kn} \quad \text{und} \quad A_{in,km}$$

durch ähnliche Vertauschungen sich ableiten lassen.

Da nun die Determinante der linken Theile von (15.) verschwindet, so muss die Determinante der rechten Theile ebenfalls verschwinden für alle diejenigen Linien α, welche Seiten eines solchen Dreiecks werden können, in das eine Polardeterminante übergeht. Die Determinante der rechten Theile, gleich Null gesetzt, giebt aber die Gleichung:

$$(17.)\quad \psi = \begin{vmatrix} \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,11} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,12} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,13} \alpha_i \alpha_k \\ \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,12} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,22} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,23} \alpha_i \alpha_k \\ \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,13} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,23} \alpha_i \alpha_k & \Sigma_i \Sigma_k A_{ik,33} \alpha_i \alpha_k \end{vmatrix} = 0,$$

und man hat den Satz:

Die Seiten aller Dreiecke, in welche die Polardeterminante zerfallen kann, umhüllen eine Curve sechster Classe

$$\psi = 0.$$

Ehe ich zu weiteren geometrischen Sätzen übergehe, muss ich zweier algebraischen Sätze gedenken, welche eine Vergleichung zweier Methoden ergiebt, die Anzahl der Dreiecke zu bestimmen, deren eine Ecke auf einer gegebenen Geraden liegt, oder deren eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Bezeichnen α_1, α_2, α_3 gegebene Coordinaten einer Geraden, so bestimmen die Gleichungen

$$(18.)\quad S=0,\quad S_{u}=0$$

zusammen zwölf Werthsysteme der x. Wegen der ersten Gleichung ist aber die Polardeterminante von x ein Dreieck. In solchem Fall zerfällt $S_{u}=0$, die α als veränderlich angesehen, in drei lineare Factoren, welche einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Ecken jenes Dreiecks darstellen. *Also geben die Gleichungen* (18.) *solche zwölf Punkte von* $S=0$ *an, deren Polardeterminanten eine Ecke in der gegebenen Geraden haben.* Diese zwölf Punkte bestimmen sich aber durch eine Gleichung vierten Grades, welche die Schnittpunkte y der Geraden mit $S=0$ angiebt. Bestimmt man die Ecken der zu diesen vier Punkten gehörigen Dreiecke, so sind dies nach dem Obigen die Punkte x. Man hat also folgenden Satz:

Die beiden Gleichungen $S=0$, $S_{u}=0$, *welche zwölf Werthsysteme ergeben, sind algebraisch lösbar. Denn bestimmt man die* y *mit Hülfe einer biquadratischen Gleichung so, dass*

$$(19.)\quad \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3=0,\quad S(y)\,^{*})=0,$$

so giebt die Zerfällung von $S_{u}(y,\alpha)=0$ *in lineare Factoren (welche durch eine cubische Gleichung bewirkt wird) die Gleichung von je drei Punkten* x, *welche je einem Werthsystem der Gleichungen* (19.) *entsprechen.*

Wenn dagegen die Gleichungen gegeben sind:

$$(20.)\quad S(x)=0,\quad \Delta_{u}(x,y)=0,$$

in welchen die y gegebene Grössen bedeuten, so hat man abermals zwölf Werthsysteme der x vor sich. Wegen der ersten Gleichung aber zerfällt die zweite, die y als die Veränderlichen betrachtet, in drei lineare Factoren, welche, einzeln gleich Null gesetzt, die Seiten des zu x gehörigen Dreiecks bestimmen. *Die Gleichungen* (20.) *liefern also diejenigen Punkte in* $S=0$, *deren eine Dreiecksseite durch den gegebenen Punkt* y *geht.* Aber bezeichnet man durch α_1, α_2, α_3 die Coordinaten einer solchen Dreiecksseite, so genügen diese den Gleichungen

$$(21.)\quad \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3=0,\qquad \psi=0,$$

---

*) Diese Schreibart ist hier und in einigen folgenden Gleichungen benutzt, um die nämlichen Functionen, welche einmal mit den Veränderlichen x, das andere Mal mit den Veränderlichen y geschrieben sind, unterscheiden zu können.

welche nur auf eine Gleichung sechsten Grades führen. Und so hat man den folgenden Satz:

Die Gleichungen $S(x) = 0$, $\Delta_v(x, y) = 0$, *welche zwölf Werth-Systeme ergeben, sind durch eine Gleichung des sechsten Grades lösbar. Sucht man nämlich zunächst solche Grössen* α, *welche den Gleichungen* (21.) *genügen, und bestimmt dann Werthepaare von* y, x *aus irgend dreien der Gleichungen* (13.) *mit Hülfe von quadratischen Gleichungen, so sind diese sechs Paar Werthsysteme die 12 Systeme von Lösungen der Gleichungen* (20.)

§. 5.

Reduction der Form ψ.

Die Form ψ lässt sich einfacher darstellen, wodurch sie mit einer der wichtigsten Fundamentalformen von u bis auf einen Factor identisch wird. Denn die Formel (17.) lehrt, dass man ψ in eine Summe von Termen folgender Art auflösen kann:

$$\begin{vmatrix} A_{ik,11} & A_{i'k',12} & A_{i''k'',13} \\ A_{ik,12} & A_{i'k',22} & A_{i''k'',23} \\ A_{ik,13} & A_{i'k',23} & A_{i''k'',33} \end{vmatrix} . \alpha_i \alpha_k \alpha_{i'} \alpha_{k'} \alpha_{i''} \alpha_{k''}.$$

Der in Determinantenform auftretende Coefficient ist aber aus den Unterdeterminanten von A zusammengesetzt, und lässt sich nach einem bekannten Theorem ausdrücken durch A^2, multiplicirt mit einer Unterdeterminante dritter Ordnung von A. Hieraus geht hervor, dass

$$\psi = \tfrac{1}{3} A^2 . Q$$

gesetzt werden kann, wo Q eine zugehörige Form bedeutet, welche für die α von der sechsten, für die Coefficienten von u aber von der dritten Ordnung ist.

Ohne direct diese Form Q zu bilden, kann man doch sehr leicht nachweisen, dass es nur eine Form giebt, der diese Eigenschaften zukommen und kann ihre symbolische Gestalt angeben. Nach einem für die Formentheorie fundamentalen Theorem, das ich anderswo bewiesen habe, lässt sich Q nothwendig als Aggregat von symbolischen Determinantenproducten darstellen. Jede solche Determinante ist von der dritten Ordnung, jedes Glied in Q besteht aber aus sechs Factoren α, multiplicirt mit drei Coefficienten u, was durch symbolische Substitutionen auf die 18te Ordnung führt. Daher muss jedes Determinantenproduct sechs Factoren enthalten, und in jedem Product

müssen sechs Reihen α und viermal drei symbolische Reihen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 enthalten sein, welche durch die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k a_h a_m = b_i b_k b_h b_m = c_i c_k c_h c_m = u_{ikhm}$$

die Coefficienten von u repräsentiren. Solcher Producte aber kann man nur ein einziges bilden, nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2,$$

und Q muss also bis auf einen Factor mit diesem Product übereinstimmen. Man hat demnach nur noch diesen numerischen Factor zu bestimmen, welcher sich, durch Vergleichung eines beliebigen Coefficienten dieser Form mit der zuerst gefundenen, gleich $\frac{1}{2}$ ergiebt. Man hat also

$$Q = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

Diese Form hat eine sehr grosse Wichtigkeit. Ich habe gezeigt, *dass die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in Liniencoordinaten immer die Form hat:*

$$P^3 - 3Q^2 = 0,$$

wo P die Form

$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^4$$

bedeutet; und die Linien, welche die Curve Q umhüllen, haben die ihnen allein zukommende Eigenschaft, die Curve $u = 0$ in vier harmonischen Punkten zu schneiden. Dies Letztere mit dem Obigen verbunden führt also auf den Satz:

Die Seiten aller Dreiecke, in welche die Polardeterminante zerfallen kann, deren Ecken immer in der Curve $S = 0$ liegen, und deren Seiten immer die Curve $Q = 0$ berühren, schneiden zugleich die Curve $u = 0$ in vier harmonischen Punkten.

§. 6.

Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Polaren der Curven vierter Ordnung.

Wenn die Polare des Punktes y in x einen Doppelpunkt haben soll, so liegt nach §. 2 x auf $\Delta_u = 0$, y auf $R = 0$. Es würde übrig bleiben die

Curve zu bestimmen, welche von den Tangenten sämmtlicher Doppelpunkte berührt wird. Die Gleichungen (8.) nehmen in diesem Fall die Gestalt an:

$$(21^a.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \Sigma_n y_m x_n u_{mnik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

wo α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, β_3 die Coordinaten der beiden Tangenten des Doppelpunktes bedeuten. Man hat also aus den vorstehenden Gleichungen, um die gesuchte Curve zu finden, etwa die y, x und β zu eliminiren. Diese Elimination wird dadurch angebahnt, dass man die obigen Gleichungen zunächst in der aufgelösten Form

$$(22.)\quad A(y_m x_n + y_n x_m) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k$$

anwendet; sodann aber, indem man mit $\alpha_m \alpha_n$, $\alpha_m \beta_n$ und $\beta_m \beta_n$ multiplicirt und jedesmal nach m und n summirt, die Combinationen bildet:

$$(23.)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \alpha_m \alpha_n, \\ 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \alpha_m \beta_n, \\ 0 = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_i \beta_k \beta_m \beta_n, \end{cases}$$

die Summen jedesmal auf alle vier Indices *mnik* ausgedehnt. Diese Gleichungen sind respective vom ersten, zweiten und dritten Grade für die β; man kann auf dieselben daher eine Eliminationsmethode anwenden, die ich anderweitig gegeben habe.

Ich will diese Gleichungen hier nur benutzen, um auf einen Zusammenhang der betreffenden Tangenten mit einer Curve hinzudeuten, welche für die Theorie der Curven vierter Ordnung von Bedeutung ist, nämlich mit der Curve

$$\Omega = \Sigma A_{mn,ik} \alpha_m \alpha_n \alpha_i \alpha_k = 0.$$

Diese Curve ist, wie $P = 0$, von der vierten Classe, aber in Beziehung auf die Coefficienten von u von der fünften Ordnung, und verhält sich zu der Invariante A ähnlich, wie die Form P zu der ersten und einfachsten Invariante von u, deren symbolischer Ausdruck $(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3)^4$ ist.

Durchschneidet man die Curve $\Omega = 0$ durch eine Gerade

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0,$$

so berühren die in den Schnittpunkten gezogenen Tangenten derselben sämmtlich eine Curve dritter Classe, welche der Polaren ganz analog ist, und dargestellt wird durch die Gleichung:

$$\beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als die erste Gleichung (23.); und die letzte Gleichung (23.) geht aus dieser hervor, wenn man die α mit den β vertauscht. Zwei Tangenten eines Doppelpunktes stehen also zu einander in dem Reciprocitätsverhältniss, welches durch folgenden Satz ausgedrückt wird:

Sind α, β die Tangenten des Doppelpunktes einer Polaren von $u = 0$, so wird β von einer Curve dritter Ordnung berührt, welche die zwölf Tangenten derjenigen Punkte der Curve $\Omega = 0$ zu Tangenten hat, in welchen diese Curve von α geschnitten wird, und umgekehrt.

Ist aber insbesondere x ein Rückkehrpunkt einer Polaren, so dass x also nach §. 2 einer der 24 Schnittpunkte von

$$S = 0, \quad \Delta_u = 0$$

ist, so fallen die Linien α, β zusammen, und die Gleichungen (23.) gehen in $\Omega = 0$ über. *Diese Curve wird also von den Tangenten der Rückkehrpunkte berührt.*

Aber alsdann sind auch die Gleichungen (13.) erfüllt, d. h. die zugehörigen Pole sind Ecken solcher Dreiecke, in welche Polardeterminanten zerfallen können. Die Coordinaten y genügen somit nicht blos der Gleichung $R = 0$, welche hier die Gestalt

$$R = T^2 - S^3 = 0$$

annimmt, sondern auch der Gleichung $S = 0$; oder mit anderen Worten, *die 24 Pole, deren Polare Rückkehrpunkte haben, sind die 24 Schnittpunkte der Curven vierter und sechster Ordnung*

$$S = 0, \quad T = 0.$$

In der Nähe dieser Pole reducirt sich die Gleichung $R = 0$ auf $(dT)^2 = 0$. Dies bedeutet, *dass in diesen 24 Punkten die Curve zwölfter Ordnung $R = 0$ selbst Rückkehrpunkte besitzt, und dass die Rückkehrtangenten derselben in eben diesen Punkten die Curve sechster Ordnung $T = 0$ berühren.*

Da ferner für jede Curve dritter Ordnung, welche einen Rückkehrpunkt enthält, die Determinante in die doppelt gerechnete Rückkehrtangente und in eine andere Gerade zerfällt, welche ebenfalls durch den Rückkehrpunkt geht, so ist jedenfalls jede der 24 Rückkehrtangenten der Polaren auch Tangente der Curve sechster Classe $\psi = 0$ oder $Q = 0$, welche nach §. 4 von den Seiten aller Dreiecke berührt wird, in welche Polardeterminanten zerfallen können. Dies zusammen mit dem Vorhergehenden giebt den Satz:

Die 24 Rückkehrtangenten der Polaren sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven vierter und sechster Classe

$$\Omega = 0, \quad Q = 0.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichung

$$A(y_m x_n + y_n x_m) = 2\Sigma_i \Sigma_k A_{mn,ik} \alpha_i \alpha_k,$$

in welche (22.) durch das Zusammenfallen der Tangenten α, β übergeht, mit α_m und summirt nach m, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

die Ausdrücke:

$$\lambda x_n = 2\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_m A_{mn,ik} \alpha_i \alpha_k$$
$$= \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_n},$$

wo der Kürze wegen

$$\lambda = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen zeigen, *dass die Punkte, in welchen die 24 Rückkehrtangenten der Polaren die Curve $\Omega = 0$ berühren, zusammenfallen mit den 24 Rückkehrpunkten x selbst, so dass also die Curve vierter Classe $\Omega = 0$ durch die Schnittpunkte der beiden Curven vierter und sechster Ordnung $S = 0$, $\Delta_u = 0$ hindurchgeht.*

§. 7.

Von den Formen, auf welche diese Untersuchung geführt hat.

Die vorliegenden Betrachtungen haben drei fundamentale Covarianten geliefert, S, T und Δ, deren erste von der vierten Ordnung ist, während die anderen beiden bis zur sechsten Ordnung aufsteigen. Von Zwischenformen ist nur S_u betrachtet worden; hingegen zwei zugehörige Formen Ω und Q von der vierten und sechsten Ordnung.

Es ist endlich die Invariante A betrachtet, welche in der Reihe der einfachen Invarianten die zweite Stelle einnimmt. Ich werde noch eine einfache symbolische Darstellung dieser Invariante angeben. Führt man in (14.) folgende symbolische Substitutionen aus:

in der ersten Horizontalreihe $u_{ihkm} = a_i a_h a_k a_m$,

in der zweiten - $u_{ihkm} = b_i b_h b_k b_m$,

etc.

so nimmt A die Gestalt an:

$$A = a_1^2 . b_2^2 . c_3^2 . d_2 d_3 . e_3 e_1 . f_1 f_2 . \Theta,$$

wo Θ die Form bezeichnet:

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_2 e_3 & e_3 e_1 & e_1 e_2 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 & f_2 f_3 & f_3 f_1 & f_1 f_2 \end{vmatrix}.$$

Man bemerkt, dass der Factor, welcher in A mit Θ multiplicirt ist, ein Glied der Entwicklung von Θ selbst ist. Und durch Vertauschung der Reihen $a, b, c, \ldots,$ durch welche der wirkliche Werth von A sich nicht ändern kann, nimmt A der Reihe nach 720 verschiedene Formen an, in deren jeder Θ mit einem seiner 720 Glieder multiplicirt erscheint. Addirt man also alle diese Formen, so erhält man

$$A = \frac{\Theta^2}{720}.$$

Aber $\Theta = 0$ ist nichts anderes als die Bedingung, dass sechs Punkte a, b, c, d, e, f auf einem Kegelschnitt liegen. *Bildet man also die Bedingung, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, erhebt den linken Theil dieser Bedingungsgleichung ins Quadrat, und ersetzt immer die Producte der Coordinaten jedes Punktes durch entsprechende Coefficienten einer Curve vierter Ordnung, so entsteht die Invariante A, multiplicirt mit 720.*

Wie übrigens endlich diese Invariante als Aggregat einfacher Determinanten dargestellt werden kann, erhellt unter Anderem aus der Darstellung von Θ, welche sich in den Nouv. Ann. T. 16 p. 418 findet, wonach Θ den Ausdruck

$$\Sigma \pm a_1 b_2 e_3 . \Sigma \pm a_1 d_2 c_3 . \Sigma \pm f_1 b_2 c_3 . \Sigma \pm f_1 d_2 e_3$$
$$- \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 . \Sigma \pm a_1 d_2 e_3 . \Sigma \pm f_1 b_2 e_3 . \Sigma \pm f_1 d_2 c_3$$

annimmt, oder einen der anderen, welche durch Vertauschung der Buchstaben aus diesem hervorgehen.

§. 8.

Ueber die Darstellung einer Function vierter Ordnung mit drei Veränderlichen durch die Summe von fünf Biquadraten.

Die vorangehenden Betrachtungen müssen zum Theil modificirt werden für diejenige besondere Classe von Curven vierter Ordnung, bei welchen die Invariante A verschwindet. Diese Curven sind algebraisch noch durch eine andere merkwürdige Eigenschaft characterisirt.

Es scheint von vorn herein möglich, eine Function u als Summe von 5 Biquadraten linearer Ausdrücke darzustellen, da in diesen die nöthige Anzahl von 15 Coefficienten vorhanden ist. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass dies nicht möglich ist, wenn nicht besondere Bedingungen erfüllt sind. In der That sei:

$$u = A_1^4+A_2^4+A_3^4+A_4^4+A_5^4,$$

wo

$$A_k = a_{k,1}x_1+a_{k,2}x_2+a_{k,3}x_3.$$

Setzt man ähnlich

$$B_k = a_{k,1}y_1+a_{k,2}y_2+a_{k,3}y_3,$$

so gehen die Gleichungen (1.) offenbar in folgende über:

$$A_1B_1.a_{1,i}a_{1,k}+A_2B_2.a_{2,i}a_{2,k}+\cdots+A_5B_5.a_{5,i}a_{5,k} = \alpha_i\beta_k+\beta_i\alpha_k.$$

Da hier die linken Theile linear sind für die fünf Grössen

$$A_1B_1, \quad A_2B_2, \quad \ldots, \quad A_5B_5,$$

so kann man diese sechs Gleichungen mit solchen Factoren multipliciren, dass die linke Seite der Summe identisch verschwindet. Die Determinante der linken Theile muss also in der ursprünglichen Form verschwinden, d. h. man hat für jede Function u, welche die gedachte Zerlegung zulässt, $A=0$.

Die Curven also, deren Gleichungen durch fünf Biquadrate darstellbar sind, bilden eine specielle Classe, welche dadurch characterisirt ist, dass ihre Invariante A verschwindet *).

---

*) Beiläufig bemerke ich den Satz, *dass wenn man für Curven dieser Gattung die erste Invariante, deren Symbol*

$$(\Sigma\pm a_1 b_2 c_3)^4$$

ist, nach den Coefficienten von u differentiirt, und statt der Incremente die Coefficienten von S einführt, das Resultat identisch verschwindet. Daraus scheint hervorzugehen, *dass im Allgemeinen die so entstehende Invariante sich von A nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden kann.*

Wenn aber die Determinante A verschwindet, kann man nach bekannten Sätzen immer sechs solche Grössen p_{ik} bestimmen, dass

$$A_{mn.ik} = p_{mn} \cdot p_{ik}.$$

In Folge dieser Gleichung erkennt man, *dass für Curven dieser Art die Form Ω sich in*

$$(\Sigma\Sigma p_{ik}\alpha_i\alpha_k)^2 = K^2$$

auflöst, oder dass die Curve vierter Klasse $\Omega = 0$ in einen doppelt zu zählenden Kegelschnitt $K = 0$ übergeht.

Da zugleich die Gleichung

$$\Sigma_i\Sigma_k u_{mnik} p_{ik} = 0$$

stattfindet, so folgt aus den Fundamentalgleichungen (21^a.)

$$(24.)\quad \Sigma_m\Sigma_n x_m y_n u_{mnik} = \alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k$$

für diesen Fall:

$$(25.)\quad \Theta = \Sigma_i\Sigma_k \alpha_i\beta_k p_{ik},$$

d. h. *je zwei Tangenten des Doppelpunktes einer Polaren sind reciproke Polaren des Kegelschnitts*

$$K = 0.$$

Betrachtet man die Gleichungen (24.) an sich, ohne sie, wie bei der Betrachtung der Doppelpunkte der Polaren mit den Gleichungen

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3 = 0,\quad \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3 = 0$$

zu verbinden, so stellen sie Linienpaare α, β dar, denen gewisse Punktenpaare x, y in der Weise entsprechen, dass die Polare von y, genommen in Bezug auf die Polare von x, oder umgekehrt, in das Linienpaar α, β zerfällt. Was man auch kürzer dahin bezeichnen kann, *dass die zweite Polare des Punktenpaares x, y in das Linienpaar α, β zerfalle.* Von diesem Gesichtspunkt aus schliesst dann die Gleichung (25.) den Satz ein:

Damit ein Linienpaar die zweite Polare eines Punktenpaares bilden könne, ist es nöthig und hinreichend, dass die beiden Linien reciproke Polaren des Kegelschnitts $K = 0$ seien; und jedes Paar reciproker Polaren kann als zweite Polare von Punktenpaaren betrachtet werden.

Im Allgemeinen bestimmen sich aus den Gleichungen (24.) die Verhältnisse der Grössen

$$x_1y_1,\quad x_2y_2,\quad x_3y_3,\quad x_2y_3+x_3y_2,\quad x_3y_1+x_1y_3,\quad x_1y_2+x_2y_1,$$

sobald passende Werthe der α, β gegeben sind, und es giebt somit für ein

Linienpaar höchstens *ein* Punktenpaar, als dessen zweite Polare dasselbe angesehen werden kann. Aber in dem vorliegenden speciellen Falle reichen die Gleichungen (24.) nur hin, um fünf der obigen Grössen durch die sechste linear auszudrücken. Setzt man dann die erhaltenen Werthe in die identische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 2x_1y_1 & x_2y_1+y_2x_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1y_2+y_1x_2 & 2x_2y_2 & x_3y_2+y_3x_2 \\ x_1y_3+y_1x_3 & x_2y_3+y_2x_3 & 2x_3y_3 \end{vmatrix},$$

so geht daraus eine cubische Gleichung für diese sechste Grösse hervor. *Für jedes Paar reciproker Polaren des Kegelschnitts $K=0$ giebt es also dann drei Punktenpaare, als deren zweite Polare jenes Linienpaar angesehen werden kann.*

Wenn insbesondre die Geraden α, β zusammenfallen, so müssen sie den Kegelschnitt $K=0$ berühren. Sie stellen dann eine Seite eines Dreiecks dar, in welches eine Polardeterminante zerfallen ist, und x, y liegen auf S. Man hat also den Satz:

Die Seiten sämmtlicher Dreiecke, in welche die Polardeterminanten zerfallen können, umhüllen den Kegelschnitt $K=0$. Jede Tangente wird dabei Seite von sechs Dreiecken; und die sechs gegenüberliegenden Dreiecksecken gruppiren sich zu drei Paaren so, dass immer ein Punkt eines Paares eine Ecke für die Polardeterminante des anderen wird.

Man kann beiläufig bemerken, dass man demnach unendlich viele Dreiecke dem Kegelschnitt umbeschreiben kann, dessen Ecken in der Curve vierter Ordnung $S=0$ liegen.

Aus diesen Sätzen schon erkennt man, dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, die Theorie dieser eigenthümlichen Gattung von Curven genauer zu verfolgen.

Carlsruhe, den 2ten September 1860.

Ueber einige Eigenschaften der Function Ex.

(Von Herrn *Stern* zu Göttingen.)

I.

1) Nach der gegenwärtig ziemlich allgemeinen Bezeichnung verstehe ich unter Ex die grösste ganze in x enthaltene Zahl. Seien p und q zwei ganze positive Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, s eine ganze positive Zahl, die kleiner als q ist, so hat man $E\left(p-\frac{sp}{q}\right)=p-1-E\frac{sp}{q}$ oder

$$(\alpha.)\qquad E\frac{sp}{q}+E\frac{(q-s)p}{q} = p-1.$$

Sei nun q ungerade, setzt man dann für s die Zahlen 1, 2, 3, ... $\frac{q-1}{2}$, so umfasst $q-s$ die Zahlen $\frac{q+1}{2}$, $\frac{q+3}{2}$, ... $q-1$. Je nachdem, für ein bestimmtes s, $E\frac{sp}{q}$ in einer der vier Zahlenformen $4n$ (wozu auch Null gerechnet wird), $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ enthalten ist, wird nach $(\alpha.)$ das entsprechende $E\frac{(q-s)p}{q}=p-(4n+1)$, $p-(4n+2)$, $p-(4n+3)$, $p-(4n+4)$ sein.

Man bilde nun die Reihe

$$(A.)\qquad E\frac{p}{q},\quad E\frac{2p}{q},\quad E\frac{3p}{q},\quad \dots\quad E\frac{(q-1)p}{q},$$

so ergiebt sich demnach Folgendes:

Ist p von der Form $4n$, so kommen in $(A.)$ ebensoviel Zahlen von der Form $4n$ als von der Form $4n+3$ und ebensoviel Zahlen von der Form $4n+1$ als von der Form $4n+2$ vor.

Ist p von der Form $4n+1$, so kommen in $(A.)$ ebensoviel Zahlen von der Form $4n+1$ als von der Form $4n+3$ vor. Die Anzahl der darin vorkommenden Zahlen von der Form $4n$ sowie von der Form $4n+2$ ist eine gerade Zahl.

Ist p von der Form $4n+2$, so kommen in $(A.)$ ebensoviel Zahlen von der Form $4n$ als von der Form $4n+1$ und ebensoviel Zahlen von der Form $4n+2$ als von der Form $4n+3$ vor.

Ist p von der Form $4n+3$, so kommen in $(A.)$ ebensoviel Zahlen von der Form $4n$ als von der Form $4n+2$ vor. Die Anzahl der darin vorkom-

menden Zahlen von der Form $4n+1$ sowie von der Form $4n+3$ ist eine gerade Zahl.

Ist $p < q$, so müssen in der Reihe (*A.*) alle vier Zahlenformen vorkommen, sobald $p > 3$, da der Uebergang von $E\frac{p}{q} = 0$ zu $E\frac{(q-1)p}{q} = p-1$ nur dadurch vermittelt werden kann, dass in den dazwischenliegenden Gliedern der Reihe (*A.*) allmälich alle zwischen Null und $p-1$ liegende Zahlen vorkommen, da $E\frac{rp}{q}$ nur um eine Einheit grösser als $E\frac{(r-1)p}{q}$ sein kann. Ist dagegen $p > q$, so können allerdings, soweit es mit den obigen Resultaten sich verträgt, einzelne Zahlenformen fehlen. Setzt man z. B. $p = 23$, $q = 11$, so enthält die entsprechende Reihe (*A.*) nur Zahlen von der Form $4n$ und von der Form $4n+2$.

2) Von den zwei Ausdrücken $\frac{sp}{q}$, $\frac{(q-s)p}{q}$ ist immer der eine ein gerades, der andere ein ungerades Vielfaches von $\frac{p}{q}$, sobald, wie vorausgesetzt wird, q ungerade ist. Zerlegt man daher die Reihe (*A.*) in die zwei Reihen

$$(B.) \quad E\frac{p}{q},\ E\frac{3p}{q},\ \ldots\ E\frac{(q-2)p}{q},$$

$$(C.) \quad E\frac{2p}{q},\ E\frac{4p}{q},\ \ldots\ E\frac{(q-1)p}{q},$$

so folgt aus dem Vorhergehenden:

Ist p von der Form $4n$, so enthält jede der Reihen (*B.*) und (*C.*) soviel Zahlen von der Form $4n$ als die andere von der Form $4n+3$, und soviel Zahlen von der Form $4n+2$ als die andere von der Form $4n+1$.

Ist p von der Form $4n+1$, so kommen in beiden Reihen gleichviel Zahlen von der Form $4n$ sowie von der Form $4n+2$ vor. Zugleich enthält jede Reihe soviel Zahlen von der Form $4n+1$, $4n+3$ als die andere von der Form $4n+3$, $4n+1$.

Ist p von der Form $4n+2$, so enthält jede Reihe soviel Zahlen von der Form $4n$ als die andere von der Form $4n+1$ und soviel Zahlen von der Form $4n+2$ als die andere von der Form $4n+3$.

Ist p von der Form $4n+3$, so enthalten beide Reihen gleichviel Zahlen von der Form $4n+1$ sowie von der Form $4n+3$. Zugleich enthält jede Reihe soviel Zahlen von der Form $4n$, $4n+2$ als die andere von der Form $4n+2$, $4n$.

Bezeichnet man durch r, s, t, u die Anzahl der in (B.) enthaltenen Zahlen von der Form $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, sowie durch r', s', t', u' die Anzahl der in (C.) enthaltenen Zahlen dieser vier Formen, so folgt also aus dem Vorhergehenden:

$$(\beta.)\quad\begin{cases}\text{für } p=4n & \text{ist } r=u';\quad s=t';\quad t=s';\quad u=r',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+1 & \;\text{-}\quad r=r';\quad s=u';\quad t=t';\quad u=s',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+2 & \;\text{-}\quad r=s';\quad s=r';\quad t=u';\quad u=t',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+3 & \;\text{-}\quad r=t';\quad s=s';\quad t=r';\quad u=u'.\end{cases}$$

3) Man betrachte ferner die zwei Reihen

$$(B'.)\quad E\frac{p}{q},\qquad E\frac{2p}{q},\qquad \dots\quad E\Big(\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{q}\Big),$$

$$(C'.)\quad E\Big(\frac{q+1}{2}\cdot\frac{p}{q}\Big),\quad E\Big(\frac{q+3}{2}\cdot\frac{p}{q}\Big),\quad \dots\quad E\frac{(q-1)p}{q}$$

und bezeichne die Anzahl der Zahlen von der Form $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ in der Reihe (B'.) durch ϱ, σ, τ, ν und in der Reihe (C'.) durch ϱ', σ', τ', ν'. Vermöge der Formel (α.) erhält man also ein dem System (β.) entsprechendes neues System von Gleichungen. Man hat nämlich:

$$(\beta'.)\quad\begin{cases}\text{für } p=4n & \text{ist } \varrho=\nu';\quad \sigma=\tau';\quad \tau=\sigma';\quad \nu=\varrho',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+1 & \;\text{-}\quad \varrho=\varrho';\quad \sigma=\nu';\quad \tau=\tau';\quad \nu=\sigma',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+2 & \;\text{-}\quad \varrho=\sigma';\quad \sigma=\varrho';\quad \tau=\nu';\quad \nu=\tau',\\ \;\;\text{-}\quad p=4n+3 & \;\text{-}\quad \varrho=\tau';\quad \sigma=\sigma';\quad \tau=\varrho';\quad \nu=\nu'.\end{cases}$$

Da die Reihen (B'.) und (C'.) zusammengenommen wieder die Reihe (A.) bilden, so hat man auch

$$(\gamma.)\quad\begin{cases}r+r' = \varrho+\varrho',\\ s+s' = \sigma+\sigma',\\ t+t' = \tau+\tau',\\ u+u' = \nu+\nu'.\end{cases}$$

4) Zwischen den Reihen (B'.) und (C.) besteht das Verhältniss, dass zu jedem Gliede $E\frac{m}{q}$ in der Reihe (B'.) ein Glied $E\frac{2m}{q}$ in der Reihe (C.) gehört. Nun ist $E\frac{2m}{q}=2E\frac{m}{q}$ oder $E\frac{2m}{q}=2E\frac{m}{q}+1$, je nachdem $\frac{m}{q}-E\frac{m}{q}$ kleiner oder nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Ist $E\frac{m}{q}$ von der Form $4n$, so ist also

$E\frac{2m}{q}$ von der Form $4n$ oder $4n+1$, und ebenso ist es, wenn $E\frac{m}{q}$ von der Form $4n+2$. Ist dagegen $E\frac{m}{q}$ von der Form $4n+1$, so ist $E\frac{2m}{q}$ von der Form $4n+2$ oder $4n+3$, und ebenso ist es, wenn $E\frac{m}{q}$ von der Form $4n+3$ ist. Die Summe der Anzahl der Zahlen von der Form $4n$ und von der Form $4n+1$ in der Reihe (C.) ist also so gross als die Summe der Anzahl der Zahlen von der Form $4n$ und $4n+2$ in der Reihe (B'.), und die Summe der Anzahl der Zahlen von der Form $4n+2$ und $4n+3$ in der Reihe (C.) so gross als die Summe der Anzahl der Zahlen von der Form $4n+1$ und $4n+3$ in der Reihe (B'.), d. h. man hat

$$r'+s' = \varrho+\tau,$$
$$t'+u' = \sigma+\nu.$$

Verbindet man die erste dieser Gleichungen mit der Gleichung $r+r'=\varrho+\varrho'$ in (γ.), so folgt

$$(\delta.) \quad r-s' = \varrho'-\tau,$$

und wenn man die zweite mit der ebenfalls in (γ.) enthaltenen Gleichung $u+u'=\nu+\nu'$ verbindet, so erhält man

$$(\delta'.) \quad u-t' = \nu'-\sigma.$$

Ist p von der Form $4n+3$, so ist nach (β'.) $\varrho'=\tau$, also nach (δ.)

$$r = s',$$

und mithin nach (β.)

$$r=s \quad \text{und} \quad s'=t',$$

d. h. wenn $p=4n+3$, so enthält die Reihe (B.) ebensoviel Zahlen von der Form $4n$ als von der Form $4n+1$, und die Reihe (C.) ebensoviel Zahlen von der Form $4n+2$ als von der Form $4n+1$.

Ist p von der Form $4n+1$, so ist $\sigma=\nu'$, also nach (δ'.) auch $u=t'$, mithin nach (β.)

$$t=u \quad \text{und} \quad s'=t',$$

d. h. in diesem Falle enthält die Reihe (B.) ebensoviel Zahlen von der Form $4n+2$ als von der Form $4n+3$ und die Reihe (C.) ebensoviel Zahlen von der Form $4n+2$ als von der Form $4n+1$. Es folgt also hieraus das interessante Resultat, dass, sobald p und q ungerade Zahlen sind, die Reihe (C.) immer ebensoviel Zahlen von der Form $4n+2$ als von der Form $4n+1$ enthält.

II.

5) In der Formel

$$\pi[f(0)+f(2n\pi)+2\sum_{r=1}^{r=n-1} f(2r\pi)] = \int_0^{2n\pi} f(x)\partial x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^{2n\pi} f(x)\cos rx\,\partial x \text{ *)}$$

oder

$$\frac{f(0)+f(2n\pi)}{2} + \sum_{r=1}^{r=n-1} f(2r\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2n\pi} f(x)\partial x + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^{2n\pi} f(x)\cos rx\,\partial x$$

setze man $2\pi x$ statt x und $f(2\pi x) = \varphi(x)$, also $f(0) = \varphi(0)$, so folgt

$$\frac{\varphi(0)+\varphi(n)}{2} + \sum_{r=1}^{r=n-1}\varphi(r) = \int_0^n \varphi(x)\partial x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^n \varphi(x)\cos 2r\pi x\,\partial x$$

und, wenn man $\frac{x}{h}$ statt x setzt,

$$h\left[\frac{\varphi(0)+\varphi(n)}{2} + \sum_{r=1}^{r=n-1}\varphi(r)\right] = \int_0^{hn} \varphi\left(\frac{x}{h}\right)\partial x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^{hn} \varphi\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{2r\pi x}{h}\,\partial x.$$

Setzt man noch $\varphi\left(\frac{x}{h}\right) = F(x)$, so folgt

$$\frac{h}{2}[F(0)+F(nh)] + h\sum_{r=1}^{r=n-1} F(rh) = \int_0^{hn} F(x)\partial x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^{hn} F(x)\cos\frac{2r\pi x}{h}\,\partial x.$$

Ist $n = \infty$ und $F(\infty) = 0$, so geht dieser Ausdruck in

$$\frac{h}{2}F(0) + h\sum_{r=1}^{r=\infty} F(hr) = \int_0^\infty F(x)\partial x + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^\infty F(x)\cos\frac{2r\pi x}{h}\,\partial x$$

über. Setzt man nun $F(x) = \frac{\sin x}{x}$, so ist die Bedingung $F(\infty) = 0$ erfüllt, und es folgt aus der letzten Formel, da $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{h}{2} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\sin hr}{r} = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos\frac{2r\pi x}{h}}{x}\partial x.$$

Da nun $\int_0^\infty \frac{\sin x\cos\frac{2r\pi x}{h}}{x}\partial x$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ oder Null hat, je nachdem $\frac{2r\pi}{h} < 1$ oder > 1 ist, d. h. je nachdem $r < \frac{h}{2\pi}$ oder $> \frac{h}{2\pi}$ ist, so wird also dieses Integral für alle Werthe des r von $r = 1$ bis $r = E\frac{h}{2\pi}$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ haben,

---

*) Bd. 21, pag. 135 dieses Journals.

für grössere Werthe des r dagegen verschwinden und man hat mithin

$$\frac{h}{2}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\sin hr}{r} = \frac{\pi}{2}+\pi E\frac{h}{2\pi}.$$

Setzt man $h=\frac{2\pi kp}{q}$, wo p, q und k ganze positive Zahlen bedeuten und q nicht in kp aufgeht, so folgt hieraus

$$(\varepsilon.)\qquad E\frac{kp}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{kp}{q}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\sin\frac{2\pi kpr}{q}}{r},$$

welche Formel schon Herr *Schaar* gefunden hat *).

Setzt man $k=1$, so hat man

$$E\frac{p}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{p}{q}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\sin\frac{2\pi pr}{q}}{r}.$$

Man setze nun $r=a+bq$, man muss also für a alle Zahlen $1, 2, \dots q-1$. und für b alle Zahlen von Null bis ∞ nehmen, und da $\sin\frac{2\pi pr}{q}=\sin\frac{2\pi pa}{q}$, so folgt

$$E\frac{p}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{p}{q}+\frac{1}{\pi}\sum_{a=1}^{a=q-1}\sum_{b=0}^{b=\infty}\sin\frac{2\pi pa}{q}\cdot\frac{1}{a+bq}.$$

Setzt man nun in dem Ausdruck $\sin\frac{2\pi pa}{q}\cdot\frac{1}{a+bq}$ zuerst $b=0$ und zugleich $a=1$, so hat man $\sin\frac{2\pi p}{q}$, setzt man aber $a=q-1$, so erhält man $-\sin\frac{2\pi p}{q}\cdot\frac{1}{q-1}$. Setzt man ferner $b=1$ und zugleich $a=1$, dann aber $a=q-1$, so findet man $\sin\frac{2\pi p}{q}\cdot\frac{1}{q+1}$ und $-\sin\frac{2\pi p}{q}\cdot\frac{1}{2q-1}$. Indem man auf diese Weise fortfährt, so dass man für b allmälig alle ganzen Zahlen bis ins Unendliche setzt, und für jeden dieser Werthe $a=1$ und dann $a=q-1$ setzt, und zählt man alle so erhaltenen Werthe zusammen, so erhält man die Reihe

$$\left(1-\frac{1}{q-1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{2q-1}+\frac{1}{2q+1}-\frac{1}{3q-1}+\cdots\right)\sin\frac{2\pi p}{q},$$

welche den Werth $\frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{q}\sin\frac{2\pi p}{q}$ hat, da, wie bekannt,

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{q-m}+\frac{1}{q+m}-\frac{1}{2q-m}+\cdots = \frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{q}.$$

Setzt man ferner in $\sin\frac{2\pi pa}{q}\cdot\frac{1}{a+bq}$ für b allmälig alle Zahlen von 0 bis ∞

*) Mém. des sav. étr. publiés par l'acad. des sc. de Belgique T. 23.

und zugleich $a=2$ und dann $a=q-2$ und addirt wieder alle Resultate, so erhält man

$$\left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{q-2}+\frac{1}{q+2}-\frac{1}{2q-2}+\cdots\right)\sin\frac{4\pi p}{q} = \frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{q}\sin\frac{4\pi p}{q}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, indem man für b alle Zahlen von 0 bis ∞, für a aber 3 und $q-3$, dann 4 und $q-4$ u. s. w., schliesslich $q-1$ und 1 setzt, und addirt man alle so erhaltenen Werthe, so giebt dies die Summe

$$\frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{p}{q}\sin\frac{2\pi p}{q}+\frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{q}\sin\frac{4\pi p}{q}+\cdots+\frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{(q-1)\pi}{q}\sin\frac{(q-1)2\pi p}{q}$$
$$= \frac{\pi}{q}\sum_{k=1}^{k=q-1}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}\sin\frac{2k\pi p}{q}.$$

Man hat aber offenbar auf diese Weise das *Doppelte* von

$$\sum_{a=1}^{a=q-1}\sum_{b=0}^{b=\infty}\sin\frac{2\pi pa}{q}\cdot\frac{1}{a+bq}$$

gefunden, mithin ist

$$(\zeta.)\qquad E\frac{p}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{p}{q}+\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=q-1}\sin\frac{2k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

Es ist dies das *erste* der Theoreme, welche *Eisenstein* im 27sten Bande dieses Journals p. 281 bekannt gemacht hat; aus demselben folgt das *zweite* von selbst.

Ist q eine *ungerade* Zahl, so kann man statt $(\zeta.)$ auch schreiben

$$(\zeta'.)\qquad E\frac{p}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{p}{q}+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\sin\frac{2k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q},$$

da

$$\sin\frac{2k\pi p}{q} = -\sin\frac{2(q-k)\pi p}{q}\quad\text{und}\quad\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q} = -\operatorname{cotg}(q-k)\frac{\pi}{q}.$$

Setzt man alsdann lp statt p und nimmt man zugleich an, dass p und q keinen gemeinschaftlichen Factor haben und $l<q$ ist, so hat man auch

$$(\eta.)\qquad E\frac{lp}{q} = -\tfrac{1}{2}+\frac{lp}{q}+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

Nimmt man nun für l alle Zahlen von 1 bis $\frac{q-1}{2}$, so hat man

$$(\vartheta.)\qquad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}}E\frac{lp}{q} = -\frac{q-1}{4}+\frac{q^2-1}{8}\cdot\frac{p}{q}+\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

Nun ist

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q} = \frac{\sin\frac{(q+1)k\pi p}{2q}\sin\frac{(q-1)k\pi p}{2q}}{\sin\frac{k\pi p}{q}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{k\pi p}{2}\cos^2\frac{k\pi p}{2q} - \cos^2\frac{k\pi p}{2}\sin^2\frac{k\pi p}{2q}}{\sin\frac{k\pi p}{q}},$$

und da $\sin\frac{k\pi p}{q} = 2\sin\frac{k\pi p}{2q}\cos\frac{k\pi p}{2q}$, so folgt

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q} = \frac{\sin^2\frac{k\pi p}{2}\operatorname{cotg}\frac{k\pi p}{2q} - \cos^2\frac{k\pi p}{2}\operatorname{tg}\frac{k\pi p}{2q}}{2},$$

mithin

$$(\vartheta'.)\quad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\left[\sin^2\frac{k\pi p}{2}\operatorname{cotg}\frac{k\pi p}{2q} - \cos^2\frac{k\pi p}{2}\operatorname{tg}\frac{k\pi p}{2q}\right]\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

Ist nun p ebenfalls eine *ungerade* Zahl, so hat in diesem Ausdrucke, je nachdem k ungerade oder gerade ist, jedes entsprechende Glied der auf der rechten Seite stehenden Summe den Werth $\operatorname{cotg}\frac{k\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}$ oder $-\operatorname{tg}\frac{k\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}$. Nimmt man an, dass q von der Form $4n+3$ also $\frac{q-1}{2}$ ungerade ist, so hat man also

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{q} + \operatorname{cotg}\frac{3\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{q} + \cdots + \operatorname{cotg}\frac{(q-1)\pi p}{2.2q}\operatorname{cotg}\frac{(q-1)\pi}{2q}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{2\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{q} + \operatorname{tg}\frac{4\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{4\pi}{q} + \cdots + \operatorname{tg}\frac{(q-3)\pi p}{2.2q}\operatorname{cotg}\frac{(q-3)2\pi}{4q}\right].$$

Nun ist

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi p}{2q} = \operatorname{tg}\left(\frac{q-1}{2}.\frac{\pi p}{q}\right),\quad \operatorname{cotg}\frac{3\pi p}{2q} = \operatorname{tg}\left(\frac{q-3}{2}.\frac{\pi p}{q}\right),\quad \ldots$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{q-1}{4}.\frac{\pi p}{q}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{q+1}{4}.\frac{\pi p}{q}\right),$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{q} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{q-1}{2}.\frac{2\pi}{q}\right),\quad \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{q} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{q-3}{2}.\frac{2\pi}{q}\right),\quad \ldots$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{q-1}{2}.\frac{\pi}{q}\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{q+1}{4}.\frac{2\pi}{q}\right),$$

also

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} \sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q} = -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q}.$$

Man sieht leicht, dass diese Formel unverändert bleibt, wenn q von der Form $4n+1$ ist. Sobald p und q ungerade sind, verwandelt sich daher die Formel $(\vartheta.)$ in

$$(\varkappa.)\quad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{lp}{q} = -\frac{q-1}{4}+\frac{q^2-1}{8}\cdot\frac{p}{q}-\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q}.$$

Dies ist das *dritte* Theorem, welches *Eisenstein* a. a. O. gegeben hat.

Ist p gerade, so folgt unmittelbar aus $(\vartheta'.)$

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} \sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2kl\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q} = -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q},$$

also nach $(\vartheta.)$

$$(\varkappa'.)\quad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{lp}{q} = -\frac{q-1}{4}+\frac{q^2-1}{8}\cdot\frac{p}{q}-\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi p}{2q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

6) Ist q eine Primzahl, a eine nicht durch q theilbare Zahl, und setzt man, mit Benutzung des bekannten *Legendre*schen Zeichens,

$$\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^m,$$

so ist, wie *Gauss* gezeigt hat *),

$$m = \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{2la}{q} - 2\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{la}{q}.$$

Ist nun a *ungerade*, so findet man aus den Formeln $(\varkappa.)$ und $(\varkappa'.)$, wenn man statt p in der ersten a und in der zweiten $2a$ setzt,

$$m = \frac{q-1}{4}-\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi a}{q}\left(\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}-2\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q}\right)$$

oder, da $2\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q} = \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{q}$,

$$m = \frac{q-1}{4}-\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi a}{q}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{q}.$$

*) Comment. soc. Gotting. Vol. XVI.

Ist $a = 1$, so ist

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{2l}{q} = 0, \qquad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{l}{q} = 0,$$

mithin $m = 0$ und daher

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \left[\operatorname{tg}\frac{k\pi}{q}\right]^2 = \frac{q(q-1)}{2}.$$

Ist dagegen a *gerade*, so folgt aus $(\varkappa'.)$

$$m = \frac{q-1}{4} + \frac{1}{2q} \sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \left(2\operatorname{tg}\frac{k\pi a}{2q} - \operatorname{tg}\frac{k\pi a}{q}\right)\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}$$

oder, da $2\operatorname{tg}\frac{k\pi a}{2q} = \operatorname{tg}\frac{k\pi a}{q}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{k\pi a}{2q}\right)$,

$$m = \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2q} \sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{k\pi a}{q}\operatorname{tg}^2\frac{k\pi a}{2q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}.$$

Ist a ungerade, so kann man auch, wie ebenfalls *Gauss* gezeigt hat*)

$$\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^m \quad \text{und} \quad m = \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{la}{q}$$

setzen. Berechnet man den Werth dieses m nach $(\varkappa.)$, so ergiebt sich das *vierte* Theorem *Eisensteins* a. a. O.

III.

7) Ist q ungerade und man setzt in $(\alpha.)$ allmälich statt s die Werthe $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ und summirt, so folgt

$$(\lambda.) \quad \sum_{l=1}^{l=q-1} E\frac{lp}{q} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Ebenso findet man

$$(\lambda'.) \quad \sum_{l=1}^{l=p-1} E\frac{lq}{p} = \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

wenn p ungerade. Beide Formeln behalten aber ihre Geltung, sobald nur eine der zwei Grössen p und q ungerade ist. Ist z. B. p ungerade, q gerade.

*) Comment. soc. Gotting. recent. T. IV.

und man setzt zunächst für s die Werthe 1, 2, ... $\frac{q-2}{2}$, so folgt aus (α.)

$$E\frac{p}{q}+E\frac{2p}{q}+\dots+E\left(\frac{q-2}{2}\cdot\frac{p}{q}\right)+E\left(\frac{q+2}{2}\cdot\frac{p}{q}\right)+\dots+E\frac{(q-1)p}{q} = \frac{q-2}{2}(p-1).$$

Indem man dann auf der einen Seite $E\left(\frac{q}{2}\cdot\frac{p}{q}\right)$ und auf der anderen das gleichgeltende $\frac{p-1}{2}$ addirt, findet man wieder die Formel (λ.). Ist $q-1$ durch v theilbar, r eine ganze Zahl $< v$, und man setzt in (α.) statt s die Werthe $r\frac{q-1}{v}+1$, $r\frac{q-1}{v}+2$, ... $(r+1)\frac{q-1}{v}$, so hat man auch, wenn man zur Abkürzung $\frac{q-1}{v}=\alpha$ setzt,

$$\sum_{l=r\alpha+1}^{l=(r+1)\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=r\alpha+1}^{l=(r+1)\alpha}(q-l)\frac{p}{q} = \frac{(p-1)(q-1)}{v}$$

und ebenso, wenn $p-1$ durch v theilbar ist, und $\frac{p-1}{v}=\beta$ gesetzt wird,

$$\sum_{l=r\beta+1}^{l=(r+1)\beta} E\frac{lq}{p}+\sum_{l=r\beta+1}^{l=(r+1)\beta} E(p-l)\frac{q}{p} = \frac{(p-1)(q-1)}{v}.$$

Ferner ist

$$(\mu.)\quad \sum_{l=r\alpha+1}^{l=(r+1)\alpha} E\frac{lp}{q} = \sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E(l+\alpha)\frac{p}{q} = \sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E\left[\frac{lp}{q}+\frac{q-p}{qv}+\beta\right]$$

$$= \sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E\left[\frac{lp}{q}+\frac{q-p}{qv}\right]+\alpha\beta,$$

und ebenso findet man

$$(\mu'.)\quad \sum_{l=r\beta+1}^{l=(r+1)\beta} E\frac{lq}{p} = \sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\left[\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\right]+\alpha\beta.$$

Man nehme an, von den Zahlen p und q sei q die grössere, so dass $\frac{q-p}{qv}$ ein ächter positiver Bruch ist. Der Werth von $E\left(\frac{lp}{q}+\frac{q-p}{qv}\right)$ wird also dem Werthe von $E\frac{lp}{q}$ gleich sein, oder ihn um eine Einheit übertreffen. Der Werth der Differenz

$$\sum_{(r-1)\alpha+1}^{r\alpha} E\left(\frac{lp}{q}+\frac{q-p}{qv}\right)-\sum_{(r-1)\alpha+1}^{r\alpha} E\frac{lp}{q}$$

zeigt daher an, wie viel Zahlen in der Reihe $[(r-1)\alpha+1]p$, $[(r-1)\alpha+2]p$, ... $r\alpha p$ vorkommen, die zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Vielfachen

von q, etwa $(t-1)q$ und tq, liegen, während zugleich $lp+\frac{q-p}{v}$ zwischen tq und $(t+1)q$ liegt, oder, mit anderen Worten, wie viel Zahlen tq vorkommen, so beschaffen dass $lp < tq$ und $> tq-\frac{q-p}{v}$, während l zwischen $(r-1)\alpha+1$ und $r\alpha$ liegt.

Die Differenz

$$E\frac{lq}{p}-E\Big(\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\Big)$$

ist Null, wenn zwischen $\frac{lq}{p}$ und $\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}$ kein Vielfaches von p enthalten ist; dagegen, wenn

$$E\Big(\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\Big)=n,\quad E\frac{lq}{p}=(n+k),$$

dann ist diese Differenz $=k$. Es drückt also

$$\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\frac{lq}{p}-\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\Big(\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\Big)$$

die Anzahl der Zahlen $(n+1)p$, $(n+2)p$, ... $(n+k)p$ aus, welche zwischen $lq-\frac{q-p}{v}$ und lq enthalten sind, wenn man für l alle Zahlen von $(r-1)\beta+1$ bis $r\beta$ nimmt. Nun kann $(n+k)p$, d. h. das grösste Vielfache von p, welches zwischen $lq-\frac{q-p}{v}$ und lq liegt, nicht über $r\alpha$ hinausgehen. Wäre nämlich $n+k=r\alpha+1$, so wäre $(n+k)p=r\alpha p+p=\frac{rpq}{v}-\frac{rp}{v}+p$, aber lq ist höchstens $=r\beta q=\frac{rpq}{v}-\frac{rq}{v}$, es wäre also $(r\alpha+1)p > lq$. Andererseits ist $(r-1)\alpha p=\frac{rpq}{v}-\frac{rp}{v}-\frac{q-1}{v}p$ jedenfalls kleiner als $lq-\frac{q-p}{v}$, wenn man für l den Werth $(r-1)\beta+1$ setzt, indem dann $lq-\frac{q-p}{v}=\frac{rpq}{v}+\frac{v-r}{v}q-\frac{q-1}{v}p$ wird. Es muss also $(n+1)p$ grösser als $(r-1)\alpha p$ sein, d. h. die Differenz $\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\frac{lq}{p}-\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\Big(\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\Big)$ drückt ebenfalls die Anzahl der Vielfachen von p zwischen $[(r-1)\alpha+1]p$ und $r\alpha p$ aus, die zwischen einem Vielfachen von q und diesem Vielfachen um $\frac{q-p}{v}$ vermindert liegen. Man hat daher

$$\sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E\Big(\frac{lp}{q}+\frac{q-p}{qv}\Big)-\sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E\frac{lp}{q}=\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\frac{lq}{p}-\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\Big(\frac{lq}{p}-\frac{q-p}{pv}\Big)$$

oder nach (μ.) und (μ'.)

$$\sum_{l=r\alpha+1}^{l=(r+1)\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=r\beta+1}^{l=(r+1)\beta} E\frac{lq}{p} = \sum_{l=(r-1)\alpha+1}^{l=r\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=(r-1)\beta+1}^{l=r\beta} E\frac{lq}{p}+2\alpha\beta.$$

Setzt man also

$$\sum_{l=1}^{l=\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=\beta} E\frac{lq}{p} = k,$$

so folgt

$$\sum_{l=\alpha+1}^{l=2\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=\beta+1}^{l=2\beta} E\frac{lq}{p} = k+2\alpha\beta$$

und allgemein

$$(\nu.)\quad \sum_{l=r\alpha+1}^{l=(r+1)\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=r\beta+1}^{l=(r+1)\beta} E\frac{lq}{p} = k+2r\alpha\beta.$$

Nun folgt aus (λ.) und (λ'.)

$$\sum_{l=1}^{l=v\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=v\beta} E\frac{lq}{p} = (p-1)(q-1) = v^2.\alpha\beta$$

und aus (ν.), wenn man allmälich statt r die Werthe 0, 1, 2, ... $v-1$ setzt,

$$\sum_{l=1}^{l=v\alpha} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=v\beta} E\frac{lq}{p} = kv+v(v-1)\alpha\beta,$$

mithin $k=\alpha\beta$, d. h., wenn man wieder für k, α, β ihre Werthe setzt,

$$(\nu'.)\quad \sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{v}} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{v}} E\frac{lq}{p} = \frac{(p-1)(q-1)}{v^2}.$$

Dies ist das *fünfte* Theorem *Eisensteins* a. a. O.

Es folgt hieraus weiter nach (ν.)

$$\sum_{l=r\frac{(q-1)}{v}+1}^{l=(r+1)\frac{q-1}{v}} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=r\frac{(p-1)}{v}+1}^{l=(r+1)\frac{p-1}{v}} E\frac{lq}{p} = (2r+1)\frac{(p-1)(q-1)}{v^2},$$

und wenn man hierin allmälich $r=0, 1, 2, \ldots h-1$ setzt (wo h nicht grösser als v sein darf) und summirt,

$$(\pi.)\quad \sum_{l=1}^{l=h\frac{q-1}{v}} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=h\frac{p-1}{v}} E\frac{lq}{p} = h^2\frac{(p-1)(q-1)}{v^2}.$$

Diese Gleichung, welche das *Eisenstein*sche Theorem als speciellen Fall enthält, hat vor nicht langer Zeit Herr *Sylvester* bekannt gemacht*) und zwar als speciellen Fall eines allgemeineren Satzes, welchen er durch eine Induction

*) Comptes Rendus T. 50, p. 732.

beweist. Dieser letztere Satz lautet: Wenn p und q positive Zahlen sind, λ eine Grösse, die kleiner ist als der kleinste Werth, welcher ap und aq zu ganzen Zahlen macht, so ist

$$(\varrho.)\quad \sum_{l=1}^{l=E(\lambda q)} E\frac{lp}{q} + \sum_{l=1}^{l=E(\lambda p)} E\frac{lq}{p} = E(\lambda p).E(\lambda q).$$

Man kann diesen Satz nicht blos einfach beweisen, wenn man sich der geometrischen Construction bedient, die *Eisenstein* im 28[sten] Bande dieses Journals p. 246 angegeben hat, sondern er ist auch in dem Satze enthalten, welchen *Gauss* bei dem dritten Beweise des Fundamentaltheorems zu Grunde gelegt und auf eine einfache Weise bewiesen hat. Der *Gauss*sche Satz heisst: Wenn $x, 2x, \ldots nx$ keine ganzen Zahlen sind, so ist

$$\sum_{l=1}^{l=n} E(lx) + \sum_{l=1}^{l=E(nx)} E\Big(l\frac{1}{x}\Big) = nE(nx),$$

also, wenn man $x = \frac{p}{q}$ und $n = E(\lambda q)$ setzt,

$$(\varrho'.)\quad \sum_{l=1}^{l=E(\lambda q)} E\frac{lp}{q} + \sum_{l=1}^{l=E\left(\frac{p}{q}E(\lambda q)\right)} E\frac{lq}{p} = E(\lambda q)E\Big(\frac{p}{q}E(\lambda q)\Big).$$

Nun setze man $\lambda q = E(\lambda q)+e$, $\lambda p = E(\lambda p)+f$, so dass e und f kleiner als die Einheit sind, so ist $\frac{p}{q}E(\lambda q) = p\lambda - \frac{ep}{q} = E(\lambda p) + \frac{fq-ep}{q}$.

Ist nun nicht $fq = ep$, so kann man immer für q diejenige der zwei Zahlen p und q nehmen, für welche $fq > ep$, dann ist $\frac{fq-ep}{q}$ ein ächter positiver Bruch, und mithin jedenfalls

$$E\Big(\frac{p}{q}E(\lambda q)\Big) = E\Big[E(\lambda p) + \frac{fq-ep}{q}\Big] = E(\lambda p),$$

wodurch die Formel $(\varrho'.)$ in die Formel $(\varrho.)$ übergeht.

Ist e der kleinste positive Rest von p nach dem Modul m und f der kleinste positive Rest nach dem Modul n, also $\frac{p-e}{m}$, $\frac{q-f}{n}$ ganze Zahlen, ist ferner k eine ganze positive Zahl so beschaffen, dass $ke < m$, $kf < n$, so hat man auch

$$(\varrho''.)\quad \sum_{l=1}^{l=\frac{k(q-f)}{n}} E\frac{lpn}{qm} + \sum_{l=1}^{l=\frac{k(p-e)}{m}} E\frac{lqm}{pn} = \frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn}.$$

Setzt man nämlich

$$pn = p',\qquad qm = q',\qquad \frac{k(q-f)}{n} = E(\lambda q'),$$

so ist

$$E\left(\frac{p'}{q'}E(\lambda q')\right)=E\left(\frac{pn}{qm}.\frac{k(q-f)}{n}\right)=E\left(\frac{kp}{m}-\frac{kpf}{qm}\right)=E\left[\frac{k(p-e)}{m}+\frac{k(qe-pf)}{qm}\right].$$

Setzt man nun $qe>pf$, so ist mithin $\frac{k(qe-pf)}{qm}$ ein positiver ächter Bruch, also $E\left(\frac{p'}{q'}E(\lambda q')\right)=\frac{k(p-e)}{m}$, und daher nach ($\varrho'$.)

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{k(q-f)}{n}} E\frac{lp'}{q'}+\sum_{l=1}^{l=\frac{k(p-e)}{m}} E\frac{lq'}{p'} = \frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn},$$

übereinstimmend mit (ϱ''.).

Ist $k=1$, so folgt

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-f}{n}} E\frac{lpn}{qm}+\sum_{l=1}^{l=\frac{p-e}{m}} E\frac{lqm}{pn} = \frac{(p-e)(q-f)}{mn}.$$

Setzt man $m=n$, so erhält man aus (ϱ''.) die einfachere Formel, welche schon Herr *Sylvester* a. a. O. gegeben hat.

8) Aus ($\varkappa$.) folgt

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{2}} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{2}} E\frac{lq}{p}$$

$$=-\frac{p+q-2}{4}+\frac{(q^2-1)p^2+(p^2-1)q^2}{8pq}-\frac{1}{2q}\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\operatorname{tg}\frac{k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q}$$
$$-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\operatorname{tg}\frac{k\pi q}{p}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{p}.$$

Nun ist andererseits nach (ν'.) der Werth dieses Ausdrucks $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$, und hieraus ergiebt sich, nach einfacher Reduction,

$$p\sum_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}}\operatorname{tg}\frac{k\pi p}{q}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{q}+q\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\operatorname{tg}\frac{k\pi q}{p}\operatorname{cotg}\frac{2k\pi}{p} = -\left(\frac{p-q}{2}\right)^2,$$

sobald, wie die Formel ($\varkappa$.) voraussetzt, p und q zwei ungerade relative Primzahlen sind. Dies stimmt mit dem Lehrsatze überein, welchen *Eisenstein* a. a. O. p. 282 gegeben hat *).

---

*) Nur dass dort der Druckfehler $\frac{1}{4}(p-q)^2$ in $\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$ zu ändern ist.

Sind allgemeiner p und q zwei relative Primzahlen und ist zugleich $p-1$ und $q-1$ durch m theilbar, so folgt aus (ζ.)

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}} E\frac{lp}{q}+\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}} E\frac{lq}{p} = -\frac{p+q-2}{2m}+\frac{p}{q}\cdot\frac{q-1}{m}\cdot\frac{m+q-1}{2m}+\frac{q}{p}\cdot\frac{p-1}{m}\cdot\frac{m+p-1}{2m}$$

$$+\frac{1}{2q}\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=q-1}\sin\frac{2k\pi pl}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}+\frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\sin\frac{2k\pi ql}{p}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{p}.$$

Da nun andererseits nach (ν'.) der Werth dieses Ausdrucks $\frac{(p-1)(q-1)}{m^2}$ ist, so folgt

$$(\sigma.)\; p\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=q-1}\sin\frac{2k\pi pl}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q}+q\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\sin\frac{2k\pi ql}{p}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{p}=(m-1)\left(\frac{p-q}{m}\right)^2.$$

Bezeichnet, unter denselben Voraussetzungen, r_l den kleinsten positiven Rest von lp nach dem Modul q und R_l den kleinsten positiven Rest von lq nach dem Modul p, so dass also

$$r_l = lp-qE\frac{lp}{q};\qquad R_l = lq-pE\frac{lq}{p},$$

so folgt auch aus (ζ.)

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\left(\frac{q}{2}-r_l\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=q-1}\sin\frac{2k\pi pl}{q}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{q},$$

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\left(\frac{p}{2}-R_l\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\sin\frac{2k\pi ql}{p}\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{p},$$

und daher nach (σ.)

$$p\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\left(\frac{q}{2}-r_l\right)+q\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\left(\frac{p}{2}-R_l\right) = \frac{m-1}{2}\left(\frac{p-q}{m}\right)^2$$

oder

$$\sum_{l=1}^{l=\frac{q-1}{m}}\left(1-\frac{2r_l}{q}\right)+\sum_{l=1}^{l=\frac{p-1}{m}}\left(1-\frac{2R_l}{p}\right) = \frac{m-1}{pq}\left(\frac{p-q}{m}\right)^2.$$

Da dieser Ausdruck immer positiv ist, so liegt hierin der Satz:

Wenn man von der Einheit einzeln das Doppelte der Brüche abzieht, welche übrig bleiben, wenn man von den Zahlen $\frac{p}{q}$, $\frac{2p}{q}$, …, $\frac{q-1}{m}\cdot\frac{p}{q}$ die

grössten darin enthaltenen ganzen Zahlen abzieht, wenn man ferner von der Einheit einzeln das Doppelte der Brüche abzieht, welche übrig bleiben, wenn man von den Zahlen $\frac{q}{p}, \frac{2q}{p}, \ldots, \frac{p-1}{m}\frac{q}{p}$ die grössten darin enthaltenen ganzen Zahlen abzieht, so wird die Summe der hierdurch entstehenden positiven Zahlen immer grösser sein, als die Summe der hierdurch entstehenden negativen (aber absolut genommenen) Zahlen.

Dies gilt also namentlich, wenn p und q ungerade Zahlen sind und $m = 2$.

Göttingen, im August 1860.

Ueber eine Reihentransformation *Stirlings*.

(Von Herrn *M. Dietrich* zu München.)

Bekanntlich hat sich zuerst *Stirling* mit der Verwandlung der Reihe

$$A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}+\cdots$$

in eine Reihe von der Form

$$A_1+\frac{B_1}{x}+\frac{C_1}{x(x+1)}+\frac{D_1}{x(x+1)(x+2)}+\cdots$$

beschäftigt. Es stellt nämlich *Stirling*, von der Gleichung

$$\frac{1}{x^2(x+1)\dots(x+n-1)}=\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}+\frac{n}{x(x+1)\dots(x+n+1)}+\frac{n(n+1)}{x(x+1)\dots(x+n+2)}+\cdots$$

ausgehend, für die Coefficienten A'_n, A''_n, A'''_n, ... der Gleichung

$$\frac{1}{x^n}=\frac{A'_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)}+\frac{A''_n}{x(x+1)\dots(x+n)}+\frac{A'''_n}{x(x+1)\dots(x+n+1)}+\cdots$$

ein sie mit den Coefficienten einer ähnlichen für $\frac{1}{x^{n+1}}$ aufgestellten Gleichung verbindendes recurrentes Gesetz auf und findet, indem er diese Gleichung für $n=2,\ 3,\ 4,\ \dots$ auf die einzelnen Glieder der zu transformirenden Reihe anwendet und dann die gleichartigen Grössen vereinigt:

$$A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}+\frac{E}{x^4}+\cdots=$$

$$A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x(x+1)}+\frac{C+D}{x(x+1)(x+2)}+\frac{2C+3D+E}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{6C+11D+6E+F}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$
$$+\frac{24C+50D+35E+10F+G}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}+\cdots$$

Dieses Verfahren führt jedoch nicht zur Kenntniss des independenten Bildungsgesetzes der Coefficienten A_1, B_1, C_1, ... der transformirten Reihe und daher auch zu keiner sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz derselben. Erst neuerlich hat *Schlömilch* in einer Abhandlung über Facultätenreihen (Zeitschr. für Math. u. Phys. IV. Jahrg. 6. Heft) aus der Betrachtung des bestimmten Integrales

$$\int_0^1 e^{-xu} f(u)\,du = \varphi(x)$$

durch die Annahme $f(u) = u^{k-1}$ die Gleichung

$$\frac{1}{x^k} = \frac{\overset{k-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\dots(x+k-1)} + \frac{\overset{k}{P}_{k-1}}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{\overset{k+1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\dots(x+k+1)} + \cdots$$

$$+ \frac{\overset{n-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \frac{1}{x^k} \cdot \frac{\overset{n}{P}_1 x + \overset{n}{P}_2 x^2 + \cdots + \overset{n}{P}_{k-1} x^{k-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

in welcher allgemein $\overset{n}{P}_m$ den Coefficienten von α^m der Entwicklung des Productes

$$\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$$

vorstellt, aufgestellt und durch den Nachweis, dass der Rest der hier angegebenen Entwicklung für ein unendlich wachsendes n gegen die Grenze Null convergirt, die in's Unendliche gehende Fortsetzung dieser und daher auch der *Stirling*schen Reihe gerechtfertigt. Doch glaube ich nichts Ueberflüssiges zu unternehmen, wenn ich auf elementarem Wege und auch in allgemeinerer Gestalt obige von *Schlömilch* gefundene Gleichung ableite und aus ihr die Umformung der Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots$$

in die neue Reihe

$$B_0 + \frac{B_1}{x+\alpha_1} + \frac{B_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{B_3}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \cdots$$

oder, mittelst der Substitution $\frac{1}{x} = z$ die der Reihe

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$$

in die Reihe

$$B_0 + \frac{B_1 z}{1+\alpha_1 z} + \frac{B_2 z^2}{(1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)} + \frac{B_3 z^3}{(1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)} + \cdots$$

vornehme.

Durch fortgesetzte Anwendung der durch die Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{x+\alpha}{x(x+\alpha)} = \frac{1}{x+\alpha} + \frac{\alpha}{x(x+\alpha)}$$

angezeigten Zerlegung des Bruches $\frac{1}{x}$ findet man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{x(x+\alpha_1)} \\
&= \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} \\
&= \frac{1}{x+\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{x(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)},
\end{aligned}$$

und allgemein, wenn man noch, um abzukürzen, das Product

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_k) = P_k(x+\alpha)$$

setzt,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{P_1(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1}{P_2(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{P_3(x+\alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}{P_n(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{xP_n(x+\alpha)}.$$

Daher wird auch

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{xP_1(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1}{xP_2(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{xP_3(x+\alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{x^2P_n(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{P_1(x+\alpha)}\Big(\frac{1}{x+\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_4)} + \dots$$

$$+ \frac{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n-1}}{(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_n)} + \frac{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}{x(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_n)}\Big)$$

$$+ \frac{1}{P_2(x+\alpha)}\Big(\frac{\alpha_1}{x+\alpha_3} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{(x+\alpha_3)(x+\alpha_4)} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_{n-1}}{(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_n)} + \frac{\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_n}{x(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_n)}\Big)$$

$$+ \frac{1}{P_3(x+\alpha)}\Big(\frac{\alpha_1\alpha_2}{x+\alpha_4} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{(x+\alpha_4)(x+\alpha_5)} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4\dots\alpha_{n-1}}{(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_n)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4\dots\alpha_n}{x(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_n)}\Big)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{P_{n-1}(x+\alpha)}\Big(\frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}}{x+\alpha_n} + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n}{x(x+\alpha_n)}\Big) + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}{xP^n(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{x^2P_n(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{P_2(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{P_3(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}{P_4(x+\alpha)} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}+\dots+\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_{n-1}+\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n-1}}{P_n(x+\alpha)}$$

$$+ \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}+\dots+\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_n+\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{x^2P_n(x+\alpha)}.$$

Man sieht hier sogleich, dass die einzelnen Zähler aus den Gliedern der ersten, zweiten, dritten, ... Combinationsklasse der ersten zwei, drei, vier, ... der Zahlen α_1, α_2, α_3, ... bestehen, so dass, wenn man die Summe der Glieder der k^{ten} Combinationsklasse der ersten p dieser Zahlen mit $C_p^k(\alpha)$ bezeichnet, man erhält:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{P_2(x+\alpha)} + \frac{C_2^1(\alpha)}{P_3(x+\alpha)} + \frac{C_3^2(\alpha)}{P_4(x+\alpha)} + \dots + \frac{C_{n-1}^{n-2}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)}.$$

Hieraus wird sodann:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{xP_2(x+\alpha)} + \frac{C_2^1(\alpha)}{xP_3(x+\alpha)} + \frac{C_3^2(\alpha)}{xP_4(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{P_2(x+\alpha)}\left(\frac{1}{x+\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{(x+\alpha_3)(x+\alpha_4)} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_5)} + \cdots + \frac{\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n}{x(x+\alpha_3)\dots(x+\alpha_n)}\right)$$

$$+ \frac{1}{P_3(x+\alpha)}\left(\frac{C_2^1(\alpha)}{x+\alpha_4} + \frac{\alpha_4 . C_2^1(\alpha)}{(x+\alpha_4)(x+\alpha_5)} + \frac{\alpha_4\alpha_5 . C_2^1(\alpha)}{(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_6)} + \cdots + \frac{\alpha_4\alpha_5\dots\alpha_n . C_2^1(\alpha)}{x(x+\alpha_4)\dots(x+\alpha_n)}\right)$$

$$+ \frac{1}{P_4(x+\alpha)}\left(\frac{C_3^2(\alpha)}{x+\alpha_5} + \frac{\alpha_5 . C_3^2(\alpha)}{(x+\alpha_5)(x+\alpha_6)} + \cdots + \frac{\alpha_5\alpha_6\dots\alpha_n . C_3^2(\alpha)}{x(x+\alpha_5)\dots(x+\alpha_n)}\right)$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \frac{1}{P_{n-1}(x+\alpha)}\left(\frac{C_{n-2}^{n-3}(\alpha)}{x+\alpha_n} + \frac{\alpha_n C_{n-2}^{n-3}(\alpha)}{x(x+\alpha_n)}\right) + \frac{C_{n-1}^{n-2}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)}.$$

Multiplicirt man nun wieder die in Klammern stehenden Reihen mit dem zugehörigen Factor, vereinigt dann die gleichbenannten Brüche und beachtet, dass allgemein

$$\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_i + \alpha_4\alpha_5\dots\alpha_i C_2^1(\alpha) + \alpha_5\dots\alpha_i C_3^2(\alpha) + \cdots + C_{i-1}^{i-2}(\alpha) = C_i^{i-2}(\alpha)$$

ist, so wird

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{P_3(x+\alpha)} + \frac{C_3^1(\alpha)}{P_4(x+\alpha)} + \frac{C_4^2(\alpha)}{P_5(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-3}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-2}(\alpha)}{xP_n(x+u)}$$

$$+ \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^3P_n(x+\alpha)}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man ferner:

$$\frac{1}{x^4} = \frac{1}{P_4(x+\alpha)} + \frac{C_4^1(\alpha)}{P_5(x+\alpha)} + \frac{C_5^2(\alpha)}{P_6(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-4}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-3}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^4P_n(x+\alpha)},$$

$$\frac{1}{x^5} = \frac{1}{P_5(x+\alpha)} + \frac{C_5^1(\alpha)}{P_6(x+u)} + \frac{C_6^2(\alpha)}{P_7(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-1}^{n-5}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-4}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^5P_n(x+\alpha)}:$$

und allgemein:

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{P_m(x+\alpha)} + \frac{C_m^1(\alpha)}{P_{m+1}(x+\alpha)} + \frac{C_{m+1}^2(\alpha)}{P_{m+2}(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_{n-2}^{n-m-1}(\alpha)}{P_{n-1}(x+\alpha)} + \frac{C_{n-1}^{n-m}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)}$$

$$+ \frac{C_n^{n-m+1}(\alpha)}{xP_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^{n-m+2}(\alpha)}{x^2P_n(x+\alpha)} + \cdots + \frac{C_n^{n-1}(\alpha)}{x^{m-1}P_n(x+\alpha)} + \frac{C_n^n(\alpha)}{x^mP_n(x+\alpha)},$$

welche letztere Gleichung für die Werthe 0, 1, 2, 3, ... der Zahlen α_1, α_2, α_3, ... in die von *Schlömilch* gefundene Entwicklung übergeht und die Grundlage der *Stirling*schen Transformation bildet.

Der auf das Glied $\frac{C_{n-1}^{n-m}(\alpha)}{P_n(x+\alpha)}$ folgende Rest der Entwicklung des Bruches $\frac{1}{x^m}$, der mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden mag, kann auch geschrieben werden:

$$\mathfrak{R} = \frac{C_n^n(\alpha)+C_n^{n-1}(\alpha).x+C_n^{n-2}(\alpha).x^2+\cdots+C_n^{n-m+1}(\alpha).x^{m-1}}{x^m.P_n(x+\alpha)},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit

$$P_n(z+\alpha) = C_n^n(\alpha)+C_n^{n-1}(\alpha).z+C_n^{n-2}(\alpha).z^2+\cdots+C_n^{n-m+1}(\alpha).z^{m-1}+\cdots+z^n,$$

wo z eine willkürliche Zahl vorstellt, multiplicirt und noch bemerkt, dass

$$\frac{P_n(z+\alpha)}{P_n(x+\alpha)} = \frac{1}{P_n\left(\frac{x+\alpha}{z+\alpha}\right)} = \frac{1}{P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right)}$$

und allgemein

$$C_n^{n-k}(\alpha) = C_n^n(\alpha).C_n^k\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

ist,

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{x^m.P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right)}\cdot\frac{C_n^n(\alpha)+C_n^{n-1}(\alpha).x+C_n^{n-2}(\alpha).x^2+\cdots+C_n^{n-m+1}(\alpha).x^{m-1}}{C_n^n(\alpha)+C_n^{n-1}(\alpha).z+C_n^{n-2}(\alpha).z^2+\cdots+C_n^{n-m+1}(\alpha).z^{m-1}+\cdots+z^n}$$

$$= \frac{1}{x^m.P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right)}\cdot\frac{1+C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x+C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x^2+\cdots+C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x^{m-1}}{1+C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z+C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z^2+\cdots+C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z^{m-1}+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z^n}.$$

Wenn nun x und sämmtliche der Zahlen α_1, α_2, α_3, ... positiv sind, und man auch noch z positiv aber kleiner als x annimmt, so ist, da

$$P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right) = 1+C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)\cdot(x-z)+C_n^2\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)\cdot(x-z)^2+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)\cdot(x-z)^n$$

ist, offenbar

$$P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right) > 1+C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right).(x-z) \text{ und } \frac{1}{P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right)} < \frac{1}{1+C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right).(x-z)}.$$

Wegen der leicht zu beweisenden Beziehung

$$C_n^k\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) < \frac{1}{k!}\left(C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)\right)^k$$

ist ferner, wenn man noch Kürze halber $C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right) = s$ setzt,

$$P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right) < 1+s.(x-z)+\frac{s^2}{2!}(x-z)^2+\cdots+\frac{s^n}{n!}(x-z)^n,$$

und um so mehr

$$P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right) < e^{s(x-z)}, \quad \text{also auch} \quad \frac{1}{P_n\left(1+\frac{x-z}{z+\alpha}\right)} > \frac{1}{e^{s(x-z)}}.$$

Sodann ist der den zweiten Factor des Werthes von $\mathfrak{R}$ bildende Bruch kleiner als der Bruch

$$\frac{1+C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x+C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x^2+\cdots+C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot x^{m-1}}{1+C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z+C_n^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z^2+\cdots+C_n^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot z^{m-1}},$$

welcher als Mittelwerth der Brüche

$$1, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{x^2}{z^2}, \quad \ldots, \quad \frac{x^{m-1}}{z^{m-1}}$$

wieder kleiner ist als der grösste von diesen, als $\frac{x^{m-1}}{z^{m-1}}$ (da $z < x$ ist), was dann um so mehr bei dem zweiten Factor des Werthes von $\mathfrak{R}$ der Fall sein wird. Endlich ist dieser, da sein Zähler grösser als Eins und sein Nenner, wenn man hier $C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ durch s_1 abkürzt, kleiner als $e^{s_1 z}$ ist, selbst grösser als der Bruch

$$\frac{1}{e^{s_1 x}}.$$

Diese Bemerkungen zusammen führen für den Werth des Restes $\mathfrak{R}$ auf folgende Beziehung:

$$\frac{1}{xz^{m-1}(1+s(x-z))} > R > \frac{1}{x^m . e^{s(x-z)+s_1 z}},$$

welche denselben zwischen zwei bloss von s und s_1 oder von $C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)$ und $C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ abhängige Grenzen stellt. Für ein unendlich wachsendes n convergiren, wie sich leicht zeigen lässt, entweder $C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)$ und $C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ beide gegen bestimmte endliche Werthe, oder sie werden beide zugleich unendlich gross. Im ersten Fall erhalten daher, da x^m und xz^{m-1} von n unabhängig sind und bestimmte endliche Werthe haben, auch die beiden Grenzen von $\mathfrak{R}$ bestimmte endliche, von Null verschiedene Werthe; im zweiten Falle aber convergiren beide Grenzen von $\mathfrak{R}$, sonach auch $\mathfrak{R}$ selbst gegen Null.

Sind einige der Zahlen α_1, α_2, α_3, ..., etwa i in der Anzahl, Null, so bleibt die ganze Betrachtung im Wesentlichen dieselbe; nur werden, da

dann anfangs schon nicht mit dem Null gewordenen $C_n^n(\alpha)$ sondern mit dem zuerst auftretenden $C_n^{n-1}(\alpha)$ dividirt wird, die Ausdrücke $C_n^1\left(\frac{1}{z+\alpha}\right)$ und $C_n^1\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ bloss aus den nicht Null gewordenen der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ gebildet. Man kann daher folgenden Satz als begründet aussprechen: *Wenn die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ alle positiv oder zum Theil Null und die übrigen positiv sind, und wenn die aus den positiven von ihnen gebildete Reihe*

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}+\cdots,$$

in's Unendliche fortgesetzt, selbst eine unendlich gross werdende Summe giebt, so gilt für jedes positive x folgende Entwicklung:

$$\frac{1}{x^m}=\frac{1}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_m)}+\frac{C_m^1(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_m)(x+\alpha_{m+1})}$$
$$+\frac{C_{m+1}^2(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{m+1})(x+\alpha_{m+2})}+\cdots+\frac{C_{m+k-1}^k(\alpha)}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{m+k})}+\cdots$$

Verwendet man diese Entwicklung für $m=1, 2, 3, \ldots$ zu der am Anfange dieses Aufsatzes angedeuteten Transformation, so wird

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots$$
$$=A_0+\frac{A_1}{x+\alpha_1}+\frac{C_1^1(\alpha).A_1+A_2}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)}+\frac{C_2^2(\alpha).A_1+C_2^1(\alpha).A_2+A_3}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)}+\frac{C_3^3(\alpha).A_1+C_3^2(\alpha).A_2+C_3^1(\alpha).A_3+A_4}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)(x+\alpha_4)}$$
$$+\cdots+\frac{C_{k-1}^{k-1}(\alpha).A_1+C_{k-1}^{k-2}(\alpha).A_2+C_{k-1}^{k-3}(\alpha).A_3+\cdots+A_k}{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{k-1})(x+\alpha_k)}+\cdots$$

Diese Gleichung erfordert für ihr Bestehen ausser der Erfüllung der für die Entwicklung von $\frac{1}{x^m}$ aufgestellten Bedingungen, dass beide in ihr vorkommende Reihen convergent sind. Die erste derselben ist convergent, wenn für ein unendlich wachsendes n

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}<x,$$

die zweite, wenn

$$\frac{C_n^n(\alpha).A_1+C_n^{n-1}(\alpha).A_2+\cdots+C_n^1(\alpha).A_n+A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_1+C_{n-1}^{n-2}(\alpha).A_2+\cdots+C_{n-1}^1(\alpha).A_{n-1}+A_n}<x+\alpha_{n+1}$$

ist. Letzterer Bruch gestaltet sich wegen der Gleichung

$$C_n^k(\alpha)=C_{n-1}^k(\alpha)+\alpha_n C_{n-1}^{k-1}(\alpha)$$

um in

$$\frac{\alpha_n C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_1+(C_{n-1}^{n-1}(\alpha)+\alpha_n C_{n-1}^{n-2}(\alpha)).A_2+(C_{n-1}^{n-2}(\alpha)+\alpha_n C_{n-1}^{n-3}(\alpha))A_3+\cdots+(C_{n-1}^{1}(\alpha)+\alpha_n)A_n+A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_1+C_{n-1}^{n-2}(\alpha).A_2+\cdots+C_{n-1}^{1}(\alpha).A_{n-1}+A_n}$$
$$=\frac{C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_2+C_{n-1}^{n-2}(\alpha).A_3+C_{n-1}^{n-3}(\alpha).A_4+\cdots+A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_1+C_{n-1}^{n-2}(\alpha).A_2+C_{n-1}^{n-3}(\alpha).A_3+\cdots+A_n}+\alpha_n.$$

Wenn nun in der zu transformirenden Reihe die Bedingung ihrer Convergenz schon vom ersten Quotienten $\frac{A_2}{A_1}$ an durchaus erfüllt wird, und die Zahlen A_1, A_2, A_3, ... alle positiv sind, so wird der Werth des Bruches der zweiten Seite letzterer Gleichung kleiner als x sein, und man hat also

$$\frac{C_n^n(\alpha).A_1+C_n^{n-1}(\alpha).A_2+\cdots+C_n^1(\alpha).A_n+A_{n+1}}{C_{n-1}^{n-1}(\alpha).A_1+C_{n-1}^{n-2}(\alpha).A_2+\cdots+C_{n-1}^1(\alpha).A_{n-1}+A_n}<x+\alpha_n,$$

während die Convergenz der transformirten Reihe erfordert, dass dieser Bruch kleiner als $x+\alpha_{n+1}$ sein soll. Diese Bedingung reducirt sich demnach auf die einfachere

$$x+\alpha_n \leqq x+\alpha_{n+1} \quad \text{oder} \quad \alpha_n \leqq \alpha_{n+1}.$$

Wird die Bedingung

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}<x$$

erst von dem Quotienten $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ an erfüllt, so kann man sich die gegebene Reihe in die zwei Reihen

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots+\frac{A_{i-1}}{x^{i-1}}$$

und

$$\frac{A_i}{x^i}+\frac{A_{i+1}}{x^{i+1}}+\frac{A_{i+2}}{x^{i+2}}+\frac{A_{i+3}}{x^{i+3}}+\cdots$$

zerlegt denken, welche jede für sich, und daher auch für ihre Summe, convergente transformirte Reihen liefern. Ebenso wird bei Erfüllung oben gegebener Bedingung die Transformation auch möglich sein, wie aus dem Bau der Coefficienten der neuen Reihe sogleich erhellt, wenn die Coefficienten A_1, A_2, A_3, ... zum Theil auch Null oder negativ sind.

Um nun noch auf besondere Fälle der allgemeinen Transformation überzugehen, seien erstens die Zahlen α_1, α_2, α_3, ... Glieder einer einfachen arithmetischen Reihe, also etwa den Zahlen

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots$$

gleich. Die allgemeinen Bedingungen

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}=\infty$$

und

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1},$$

beide auf ein unendlich wachsendes n sich beziehend, gestalten sich um in folgende:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+(n-1)b} = \infty$$

und

$$a+(n-1)b \leqq a+nb,$$

welchen beiden durch jedes positive b genügt wird. Es hat also in diesem Falle, wohin auch die *Stirling*sche Transformation gehört, die Transformation einer gegebenen Reihe bloss noch die Convergenz derselben zur Bedingung.

Sind die Zahlen α_1, α_2, α_3, ... Glieder einer höheren arithmetischen Reihe, oder Potenzen der Glieder einer einfachen, deren Exponent die Einheit übersteigt, so erhält die Reihe

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}$$

auch für ein unendlich wachsendes n eine bestimmte endliche Zahl als Summenwerth und es ist demnach schon die Transformation des Bruches $\frac{1}{x^m}$ nicht in dieser Weise möglich.

Wählt man endlich für die Zahlen α_1, α_2, α_3, ... die Glieder einer geometrischen Reihe, etwa die Zahlen

$$a,\ ac,\ ac^2,\ ac^3,\ \ldots$$

so ist die Transformation der Reihe von der Erfüllung der Bedingungen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ac^2}+\frac{1}{ac^3}+\cdots = \infty$$

und

$$ac^{n-1} \leqq ac^n$$

abhängig, von denen die erste verlangt, dass $c \leqq 1$, die zweite, dass $c \geqq 1$ ist; sie ist also nur möglich, wenn $c=1$, d. h. wenn die Zahlen α_1, α_2, α_3, ... alle gleich a sind. Doch ist für $c<1$ hier wenigstens noch die Umformung des Bruches $\frac{1}{x^m}$ statthaft. Die bekannte Entwicklung des Productes

$$(x+a)(x+ac)(x+ac^2)\ldots(x+ac^{k-1})$$

nach Potenzen von x, worin die Coefficienten beziehungsweise den Werthen gleich werden, welche im vorliegenden Falle die Grössen $C_k^1(\alpha)$, $C_k^2(\alpha)$, ...

annehmen, liefert die Ergebnisse:

$$C_k^1(\alpha) = a \cdot \frac{1-c^k}{1-c},$$

$$C_k^2(\alpha) = ac \cdot \frac{(1-c^k)(1-c^{k-1})}{(1-c)(1-c^2)}$$

u. s. w. und allgmein

$$C_k^i(\alpha) = a^i c^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{(1-c^k)(1-c^{k-1})\dots(1-c^{k-i+1})}{(1-c)(1-c^2)\dots(1-c^i)}.$$

Hierdurch wird dann:

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{(x+a)(x+ac)\dots(x+ac^{m-1})} \cdot \Big(1 + \frac{1-c^m}{1-c} \cdot \frac{a}{x+ac^m} + \frac{(1-c^m)(1-c^{m+1})}{(1-c)(1-c^2)} \cdot \frac{a^2 c}{(x+ac^m)(x+ac^{m+1})}$$

$$+ \frac{(1-c^m)(1-c^{m+1})(1-c^{m+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)} \cdot \frac{a^3 c^3}{(x+ac^m)(x+ac^{m+1})(x+ac^{m+2})}$$

$$+ \frac{(1-c^m)\dots(1-c^{m+3})}{(1-c)\dots(1-c^4)} \cdot \frac{a^4 c^6}{(x+ac^m)\dots(x+ac^{m+3})} + \cdots\Big).$$

Für $c = 1$, in welchem Falle, wie schon erwähnt, die Transformation einer Reihe noch möglich ist, geht obiger Ausdruck für $C_k^i(\alpha)$ über in

$$C_k^i(\alpha) = a^i \cdot \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1.2\dots i}$$

und man erhält dann, wenn man noch $\frac{1}{x} = z$ setzt, folgende Gleichung:

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$$

$$= A_0 + A_1 \cdot \frac{z}{1+az} + (aA_1 + A_2) \cdot \frac{z^2}{(1+az)^2} + (a^2 A_1 + 2aA_2 + A_3) \cdot \frac{z^3}{(1+az)^3}$$

$$+ (a^3 A_1 + 3a^2 A_2 + 3aA_3 + A_4) \cdot \frac{z^4}{(1+az)^4} + \cdots,$$

welche sich auch durch die Substitution $\frac{z}{1+az} \cdot \left(1 - \frac{az}{1+az}\right)^{-1}$ für z ergiebt.

München, im September 1860.

Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

(Fortsetzung der Abhandlung Band 57, p. 359 dieses Journals.)

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

VI.

Indem ich vorläufig den im vorigen Paragraphen behandelten Zusammenhang der in Rede stehenden Curven mit den elliptischen Functionen fallen lasse, beabsichtige ich zunächst noch zwei Erzeugungsweisen derselben darzulegen, vermittelst deren sie sich aus den Kegelschnitten auf die einfachste Weise ableiten lassen. Jede dieser Curven kann nämlich, wie ich sogleich zeigen werde, auch als Bahn eines Punktes betrachtet werden, welcher sich so bewegt, dass ein gegebener Kegelschnitt von ihm aus unter einem constanten Winkel gesehen wird, wobei aber nicht unerwähnt bleiben mag, welche Bedeutung für die wirkliche Figur es hat, wenn gesagt wird, dass ein Kegelschnitt von zwei in der Innenfläche desselben liegenden Punkten aus unter gleichem Winkel gesehen werde. Jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts kann nämlich als gemeinschaftliches Centrum zweier involutorischer Strahlenbüschel betrachtet werden, deren entsprechende Strahlen conjugirte Polaren des Kegelschnitts sind. Ist nun diese involutorische Beziehung für zwei Punkte der Ebene übereinstimmend, d. h. lassen sich die beiden in dem einen Punkte vereinigten Büschel bei unveränderter gegenseitiger Stellung der einzelnen Strahlen so auf die beiden im anderen Punkte vereinigten Büschel legen, dass beide Büschelpaare gleichzeitig congruiren, so sind wir zu der Ausdrucksweise berechtigt, dass von jenen Punkten, mögen sie nun im Innern oder ausserhalb der Fläche des Kegelschnitts liegen, der letztere unter gleichem Winkel gesehen werde. Dies vorausgeschickt, ergiebt sich die eine der beiden zunächst darzulegenden Erzeugungsweisen der in Rede stehenden Curven nebst einigen merkwürdigen Nebenumständen, welche mit der doppelten Periodicität der elliptischen Functionen zusammenhängen, aus folgendem

Lehrsatz. *Bewegt sich ein Punkt so in einer Ebene, dass von ihm aus ein gegebener, einen Mittelpunkt habender Kegelschnitt fortwährend unter*

einem constanten (reellen oder imaginären) Winkel μ oder seinem Nebenwinkel gesehen wird, so giebt es noch einen zweiten Kegelschnitt, in Bezug auf welchen sich jener Punkt nach demselben Gesetze bewegt. Immer ist einer dieser beiden Kegelschnitte eine Ellipse, der andere eine Hyperbel, auch sind ihre gleichgerichteten Axen proportional und fallen in einander; doch kann die Hauptaxe des einen sowohl auf die Hauptaxe als auch auf die Nebenaxe des anderen fallen. Die von dem bewegten Punkte beschriebene Bahn ist stets eine der in Rede stehenden Curven vierten Grades und zwar sind die vier reellen und die vier imaginären Brennpunkte jener Kegelschnitte zugleich die Brennpunkte dieser Curve. Sind endlich μ und μ_1 die zu den beiden Kegelschnitten gehörigen Sehwinkel, e und e_1 die Entfernungen der Brennpunkte vom Mittelpunkt, so gilt die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang}^2\mu}{\operatorname{tang}^2\mu_1} = \frac{e^2}{e_1^2}.$$

Sei nämlich $\alpha x^2+\beta y^2 = 1$ ein auf rechtwinklige Coordinaten bezogener Kegelschnitt und seien

$$y-y' = a'(x-x'),$$
$$y-y' = a''(x-x')$$

die beiden von einem beliebigen Punkte (x', y') an denselben gelegten Tangenten, so ist bekanntlich

$$a'+a'' = \frac{2\alpha x'y'}{1-\alpha x'^2},$$

$$a'a'' = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1-\beta y'^2}{1-\alpha x'^2}.$$

Sei nun μ der von beiden Tangenten gebildete Winkel, so erhält man leicht

$$\operatorname{tang}^2\mu = \frac{(a'-a'')^2}{(1+a'a'')^2} = \frac{4\alpha\beta(\alpha x'^2+\beta y'^2-1)}{(\alpha+\beta-\alpha\beta(x'^2+y'^2))^2}.$$

Bewegt sich nun der Punkt (x', y') so, dass μ constant bleibt, so erhält man für die Bahn desselben die Gleichung

$$(28.)\quad (\alpha+\beta-\alpha\beta(x^2+y^2))^2\operatorname{tang}^2\mu-4\alpha\beta(\alpha x^2+\beta y^2-1) = 0.$$

Setzen wir hier $y = R\sin u$, $x = R\cos u$ und ausserdem

$$(29.)\quad \begin{cases} L = \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{4}{\alpha\operatorname{tang}^2\mu}, \\ M = \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{4}{(\beta-\alpha)\sin^2\mu}\right), \\ N = \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{4}{\operatorname{tang}^2\mu}, \end{cases}$$

so erhalten wir die Gleichung (7.) in §. 1. Die von dem bewegten Punkte beschriebene Curve gehört also zu den in Rede stehenden, und zwar lassen sich, da die Zahl der unabhängigen Constanten α, β, μ drei ist, *alle* Curven dieser Art auf diese Weise erzeugen.

Um die Entfernungen der in der X-Axe liegenden Brennpunkte vom Mittelpunkte zu bestimmen, haben wir für L, M, N die Werthe aus (29.) in (11.) einzusetzen, und erhalten so

$$(30.)\quad C = -\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}+\frac{4}{(\beta-\alpha)\sin^2\mu}\right).$$

Bezeichnen wir nun die Wurzeln der Gleichung

$$x^4+Cx^2+M = 0$$

durch e und e_1, so erhalten wir für e^2 und e_1^2 die *rationalen* Ausdrücke

$$(31.)\quad \begin{cases} e^2 = \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}, \\ e_1^2 = \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{4}{(\beta-\alpha)\sin^2\mu}, \end{cases}$$

aus deren ersterer folgt, dass die beiden in die X-Axe fallenden (reellen oder imaginären) Brennpunkte des Kegelschnitts mit zwei Brennpunkten der Curve vierten Grades zusammenfallen. Dasselbe Resultat ergiebt sich dann auch mit Hilfe der Gleichung (13.) in Betreff der in der Y-Axe liegenden Brennpunkte des Kegelschnitts.

Vermöge der Gleichberechtigung und Reciprocität der beiden Paare reeller conjugirter Brennpunkte der durch die Gleichung (7.) gegebenen Curve lässt sich nun vermuthen, dass zu dem zweiten reellen Brennpunktspaare ebenfalls ein reeller Kegelschnitt $\alpha_1 x^2+\beta_1 y^2 = 1$ nebst dem Sehwinkel μ_1 gehört, von welchem jene Curve sich auf dieselbe Weise herleiten lässt. Versuchen wir diesem gemäss die Constanten α_1, β_1, μ_1 aus α, β, μ zu bestimmen. Die Beziehung dieser Grössen muss eine reciproke sein, dergestalt, dass α_1, β_1, μ_1 gerade so aus α, β, μ gefunden wird wie α, β, μ aus α_1, β_1, μ_1.

Da nun e_1 für den zweiten Kegelschnitt dieselbe Bedeutung haben muss wie e für den ersten, so müssen, *wenn* es einen zweiten Kegelschnitt der erwähnten Beschaffenheit giebt, den Gleichungen (31.) analog, die folgenden Gleichungen gelten:

$$(32.)\quad \begin{cases} e_1^2 = \dfrac{1}{\alpha_1}-\dfrac{1}{\beta_1}, \\ e^2 = \dfrac{1}{\alpha_1}-\dfrac{1}{\beta_1}+\dfrac{4}{(\beta_1-\alpha_1)\sin^2\mu_1}, \end{cases}$$

ausserdem aber auch in Uebereinstimmung mit (29.) die Gleichungen

$$(33.)\quad \begin{cases} L = \frac{2}{\alpha_1}+\frac{2}{\beta_1}+\frac{4}{\alpha_1 \operatorname{tang}^2\mu_1}, \\ M = \left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\beta_1}+\frac{4}{(\beta_1-\alpha_1)\sin^2\mu_1}\right), \\ N = \left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\beta_1}\right)\cdot\frac{4}{\operatorname{tang}^2\mu_1}. \end{cases}$$

Durch Elimination von β_1 aus den ersten der Gleichungen (32.) und (33.) erhält man aber

$$\alpha_1 \sin^2\mu_1(L+2e_1^2) = 4;$$

ferner durch Division der dritten in (33.) durch die erste in (32.)

$$(34.)\quad \frac{N}{e_1^2} = \frac{4}{\operatorname{tang}^2\mu_1}.$$

Eliminirt man nun μ_1 aus den beiden letzten Gleichungen, so erhält man

$$\alpha_1 = \frac{N+4e_1^2}{e_1^2(L+2e_1^2)},$$

und wenn man aus (29.) die Werthe von N und L in letztere Gleichung einsetzt,

$$(35.)\quad \alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{\beta e_1^2},$$

wo e_1^2 mittelst (31.) durch α, β, μ unmittelbar ausgedrückt werden kann. Aus (32.) und (35.) findet man nun auch leicht

$$(36.)\quad \beta_1 = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha e_1^2};$$

endlich aus (34.), welcher analog auch die Gleichung $\frac{N}{e^2} = \frac{4}{\operatorname{tang}^2\mu}$ gilt, die Gleichung

$$(37.)\quad \operatorname{tang}^2\mu_1 = \operatorname{tang}^2\mu\cdot\frac{e_1^2}{e^2}.$$

Letztere Gleichung ist im obigen Lehrsatz ausdrücklich erwähnt; ausserdem folgt aber noch aus (35.) und (36.) die folgende Gleichung

$$(38.)\quad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 0,$$

aus welcher hervorgeht, dass immer der eine der beiden Kegelschnitte eine Ellipse, der andere eine Hyperbel sein muss, und dass ihre Axen proportional sind.

Es wäre nun noch zu beweisen, dass die der Gleichung (28.) analog gebildete Gleichung

$$(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\beta_1(x^2+y^2))^2\operatorname{tang}^2\mu_1-4\alpha_1\beta_1(\alpha_1x^2+\beta_1y^2-1) = 0$$

bei Anwendung der durch (35.), (36.) und (37.) gegebenen Substitutionen in die Gleichung (28.) übergeht; hiervon aber kann sich der Leser leicht selbst überzeugen. Auch sieht man leicht, wenn man α, β, μ aus (35.), (36.) und (37.) entwickelt, dass diese Grössen aus α_1, β_1, μ_1 gerade so gewonnen werden wie α_1, β_1, μ_1 aus α, β, μ. Der obige Lehrsatz ist somit bewiesen *).

VII.

Durch den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz ist eine wesentliche Verschiedenheit der Brennpunktspaare zur Evidenz gebracht, und wir wollen daher diejenigen Brennpunkte der Curve vierten Grades, welche zugleich der oben gedachten Ellipse angehören, die *elliptischen*, die zugleich der Hyperbel angehörenden aber die *hyperbolischen* Brennpunkte der Curve nennen. Ist nun die Gleichung einer solchen Curve unter der im ersten Paragraphen erwähnten Form

$$mS^2+nD^2 = 4e^2$$

gegeben (für das dortige a werde fortan immer e gesetzt), so muss es an der Beschaffenheit der Zahlen m und n erkannt werden können, ob die Excentricität e zu dem elliptischen oder hyperbolischen Brennpunktspaare gehöre. Das betreffende Kriterium ist aber nicht schwer zu ermitteln. Aus den Gleichungen (9.) in Verbindung mit (29.) folgt nämlich, dass

$$(39.)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}+\dfrac{4}{\alpha\operatorname{tang}^2\mu} = e^2\left(\dfrac{1-m}{m}+\dfrac{1-n}{n}\right), \\ \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{4}{(\beta-\alpha)\sin^2\mu} = e^2.\dfrac{1-m}{m}.\dfrac{1-n}{n}, \end{cases}$$

indem $M = e^2e_1^2$ nach Gleichung (10.) und $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta} = e^2$.

*) Der Vollständigkeit wegen werde hier noch der entsprechende Satz für die Parabel ohne Beweis mitgetheilt: Bewegt sich ein Punkt so in einer Ebene, dass von ihm aus eine gegebene Parabel unter einem constanten (reellen oder imaginären) Winkel gesehen wird, so giebt es noch eine zweite Parabel von demselben Parameter und entgegengesetzter Axenrichtung, in Bezug auf welche sich jener Punkt nach demselben Gesetze bewegt. Die von dem bewegten Punkte beschriebene Bahn ist eine Hyperbel (für reelle Sehwinkel) oder eine Ellipse (für imaginäre Sehwinkel), deren Brennpunkte in die Brennpunkte der beiden Parabeln fallen.

Aus diesen beiden Gleichungen findet man aber

$$mn = \frac{(\beta-\alpha)^2\sin^2\mu}{4\beta^2},$$

$$m+n = \frac{\beta-\alpha}{\beta},$$

woraus wiederum leicht gefolgert wird, dass

$$(40.) \quad \begin{cases} m = \dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\cos^2\dfrac{\mu}{2}, \\ n = \dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\sin^2\dfrac{\mu}{2} \end{cases}$$

gesetzt werden kann. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$(41.) \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1-(m+n).$$

Die Gleichung $mS^2+nD^2=4e^2$ ist also *auf elliptische oder hyperbolische Brennpunkte bezogen, jenachdem der Ausdruck* $1-(m+n)$ *einen positiven oder negativen Werth hat.* Dies bestätigt sich, wenn man die Curve mittelst der Gleichung

$$m_1S^2+n_1D^2 = 4e_1^2$$

auf das andere Brennpunktspaar bezieht $\left(\text{wo } m_1=1-n,\ n_1=1-m,\ e_1=\pm e\sqrt{\frac{(1-m)(1-n)}{mn}}\right.$ vergl. §. $\left.1\right)$, wo dann der Ausdruck $1-(m_1+n_1)$ den entgegengesetzten Werth von $1-m-n$ hat. Im Uebrigen mögen hier noch folgende aus (40.) hergeleitete Gleichungen bemerkt werden:

$$(42.) \quad \begin{cases} \tang^2\dfrac{\mu}{2} = \dfrac{n}{m}, \\ \alpha = \dfrac{m+n}{e^2}, \\ \beta = \dfrac{m+n}{e^2(1-m-n)}, \end{cases}$$

mittelst deren α, β, μ aus m, n, e und natürlich ebenso α_1, β_1, μ_1 aus m_1, n_1, e_1 gefunden werden können.

Die Anwendung dieser Formeln auf einen gewissen speciellen Fall führt leicht zu einem bemerkenswerthen Resultate. Ist nämlich der Kegelschnitt $\alpha x^2+\beta y^2=1$ eine gleichseitige Hyperbel, ist also $\alpha+\beta=0$, so ist, wie aus (35.) und (36.) folgt, $\alpha_1x^2+\beta_1y^2=1$ eine Ellipse mit unendlich grossen Axen;

zugleich aber folgt aus (40.), dass $m = 2\cos^2\frac{1}{2}\mu$, $n = 2\sin^2\frac{1}{2}\mu$, und folglich

$$m_1 = 1-n = \cos\mu,$$

$$n_1 = 1-m = -\cos\mu,$$

$$e_1^2 = e^2 \cdot \frac{m_1 n_1}{mn} = -e^2 \operatorname{cotg}^2\mu.$$

Die auf elliptische Brennpunkte bezogene Gleichung der in Rede stehenden Curve ist nun

$$(43.) \quad \cos\mu . S^2 - \cos\mu . D^2 = 4e_1^2.$$

Setzt man nun die von dem die Curve beschreibenden Punkte nach den Brennpunkten der Ellipse $\alpha_1^2 x^2 + \beta_1 y^2 = 1$ gehenden rad. vect. respective v und v', so lässt sich, da $S = v+v'$ und $D = v-v'$, die Gleichung (43.) auch so schreiben:

$$(44.) \quad vv' = \frac{e_1^2}{\cos\mu}.$$

Somit lassen sich aus jeder gleichseitigen Hyperbel nur Curven von der durch (44.) gegebenen Form herleiten; der betreffende Satz würde also heissen: *Bewegt sich ein Punkt so in einer Ebene, dass eine gegebene Hyperbel von ihm aus unter einem constanten (reellen oder imaginären) Winkel gesehen wird, so giebt es in einer der beiden Axen der Hyperbel immer zwei feste Punkte von der Beschaffenheit, dass das Product der Entfernungen dieser Punkte von dem sich bewegenden Punkte constant bleibt und umgekehrt.* Die festen Punkte liegen in der Nebenaxe der Hyperbel, wenn der betreffende Sehwinkel reell ist, und zwar entsteht dann durch die Bewegung des Punktes eine Curve der zweiten Art, und das constante Product der rad. vect. ist grösser als das Quadrat der halben Entfernung jener festen Punkte. Dagegen liegen die festen Punkte in der Hauptaxe, wenn der Sehwinkel imaginär ist, und zwar entsteht eine Curve der ersten Art (mit zwei gesonderten reellen Aesten, welche ausserhalb einander liegen), auch ist dann das constante Product der rad. vect. kleiner als das halbe Quadrat der Entfernung der beiden festen Punkte.

VIII.

Sind A und B zwei beliebige feste Punkte einer Ebene, deren Entfernung $2e$ gesetzt werde, und sind A' und B' zwei beliebige feste Punkte einer andern (oder auch derselben) Ebene und ihre Entfernung $2e' = 2ep$

(wo p eine beliebige Zahl), setzt man ferner $m' = mp^2$, $n' = np^2$, so dass also jedes Werthenpaar von S und D, welches der Gleichung

$$mS^2 + nD^2 = 4e^2$$

genügt, auch der Gleichung

$$m'S^2 + n'D^2 = 4e'^2$$

genügen muss, so repräsentiren die beiden entstehenden Gleichungen, wenn die erstere auf die Brennpunkte A und B, die andere auf die Brennpunkte A' und B' bezogen wird, verschiedene Curven, welche aber, da $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$, in Folge von (42.) in dem einen der beiden Sehwinkel übereinstimmen. Ist nun der zu den Brennpunkten A und B gehörige Kegelschnitt $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ eine Ellipse mit unendlich kleiner Nebenaxe, so artet die durch die Gleichung $mS^2 + nD^2 = 4e^2$ dargestellte Curve (als Ort der Punkte, von welchen aus die Strecke AB unter constantem Winkel μ gesehen wird) in ein System zweier gleicher Kreise aus, welche AB zur Chordale haben. Wenden wir auf diese die oben gemachte Bemerkung an, so haben wir den Satz: *Werden in zwei verschiedenen Ebenen zwei feste Punkte A und B, A' und B' als Hauptpunkte angenommen und werden die übrigen Punkte der Ebene dergestalt auf einander bezogen, dass je zwei entsprechende Punkte X und X' von den respectiven Hauptpunkten gleiche Abstände haben, so dass $AX = A'X'$ und $BX = B'X'$, so hat man ein Beziehungssystem, wobei jedem durch A und B gehenden Kreise in der einen Ebene eine durch eine Gleichung von der Form $mS^2 + nD^2 = 4e^2$ darstellbare Curve in der anderen Ebene entspricht, und zwar ist der eine der beiden zu letzterer Curve gehörenden constanten Kegelschnitt-Sehwinkel gleich dem zur Sehne AB gehörenden Peripheriewinkel des in der ersteren Ebene liegenden Kreises* (vergl. *Jacobi*, Bd. 12 dieses Journal, pag. 139 und 140). Hieraus ist zugleich eine sehr einfache Constructionsweise solcher Curven gegeben.

IX.

In §. 2 haben wir gesehen, dass die in Rede stehenden Curven vierten Grades in drei Hauptarten zerfallen, je nachdem in der Gleichung

$$R^4 - LR^2 + M + NR^2 \cos^2 u = 0$$

das constante Glied M positiv, negativ oder Null ist. In §. 3 haben wir ferner gesehen, dass ein System solcher Curven, welches confocal ist, in zwei



Schaaren zerfällt, welche einander rechtwinklig durchsetzen. Jede der drei Hauptarten muss daher noch in zwei Unterabtheilungen geschieden werden, jedoch so, dass die Unterabtheilungen der zweiten Art (vergl. die Figur in §. 3) nicht wesentlich verschieden sind. Wir wollen nun der Kürze wegen die drei Hauptarten der Curven durch I, II, III und ihre Unterabtheilungen durch I_a und I_b, III_a und III_b bezeichnen, und zwar gehöre in I eine Curve zu a oder b, je nachdem sie die zweite Axe in vier reellen oder vier imaginären Punkten schneidet; ebenso in III zu a oder b, je nachdem sie die zweite Axe in zwei verschiedenen reellen oder nur in einem Punkte (dem Mittelpunkte als Doppelpunkt) trifft.

Für die Durchschnittspunkte der Curven I mit der zweiten Axe muss aber die Gleichung $R^4 - LR^2 + M = 0$ gelten. Eine Curve wird also zu I_a oder I_b gehören, jenachdem $L^2 - 4M$ einen positiven oder negativen Werth hat. Ebenso sieht man leicht, dass eine Curve zu III_a oder III_b gehört, je nachdem L positiv oder negativ ist.

Dies vorausgeschickt können wir nun die in §. 6 dargelegte Erzeugungsweise der in Rede stehenden Curven leicht specialisiren, und zwar sind folgendes die Resultate der betreffenden Specialisirung:

1) Ist der constante Sehwinkel, unter welchem eine Ellipse von einem bewegten Punkte aus gesehen wird, reell, so ist er auch für die zugeordnete Hyperbel reell und der bewegte Punkt beschreibt eine zu I_a gehörige Linie, und zwar ist der zu dem einen Ast gehörige Sehwinkel der Supplementswinkel des zu dem anderen Ast gehörigen Sehwinkels. Beide Aeste fallen daher zusammen, wenn der Sehwinkel für die Ellipse ein rechter ist; in diesem Falle artet die Linie aber in einen Kreis aus und der Sehwinkel ist dann für *beide* zugeordnete Kegelschnitte ein rechter. Bei den Curven I_a sind die hyperbolischen Brennpunkte weiter vom Mittelpunkte entfernt, als die elliptischen.

2) Ist der constante Winkel, unter welchem eine Hyperbel von einem bewegten Punkte aus gesehen wird, imaginär, so ist er auch für die zugeordnete Ellipse imaginär und der bewegte Punkt beschreibt eine zu I_b gehörige Linie. Ist insbesondere $\tang \mu = \pm\sqrt{-1}$, so ist auch $\tang \mu_1 = \pm\sqrt{-1}$ und die Curve artet in zwei isolirte Punkte aus, die Brennpunkte der beiden in diesem Falle confocalen Kegelschnitte. Bei den Curven I_b sind die elliptischen Brennpunkte weiter vom Mittelpunkte entfernt, als die hyperbolischen.

3) Ist der constante imaginäre Winkel, unter welchem eine Ellipse von einem bewegten Punkte aus gesehen wird, gleich dem Winkel, unter welchem sie vom Mittelpunkte aus gesehen wird, so beschreibt der bewegte Punkt eine Curve III_b. Bei diesen Curven fallen die beiden hyperbolischen Brennpunkte in den Mittelpunkt.

4) Ist der constante reelle Winkel, unter welchem eine Hyperbel von einem bewegten Punkte aus gesehen wird, gleich dem Asymptotenwinkel (oder seinem Supplementswinkel), so beschreibt jener Punkt eine Curve III_a. Bei diesen Curven fallen die beiden elliptischen Brennpunkte in den Mittelpunkt.

5) Ist der constante Winkel, unter welchem eine Ellipse von einem bewegten Punkte aus gesehen wird, imaginär, für die ihr zugeordnete Hyperbel aber reell, so beschreibt der bewegte Punkt eine zu II gehörige Linie. Letztere wird durch die sub No. 4 erwähnte Linie III_a von der Hyperbel getrennt, trennt aber selbst die sub No. 3 erwähnte Linie III_b von der Ellipse; sie wird nämlich von der III_a umschlossen und umschliesst selbst die III_b. Die Hauptaxe jedes der beiden zugeordneten Kegelschnitte fällt in diesem Falle auf die Nebenaxe des anderen, während in den sub No. 1 und 2 besprochenen Fällen die Hauptaxen beider Kegelschnitte auf einander fallen.

X.

Aus der in §. 6 entwickelten Erzeugungsweise der in Rede stehenden Curven lässt sich noch eine andere, fast noch einfachere ableiten, welche ich jetzt noch darlegen will:

Aus der Form der Gleichung $R^4 - LR^2 + M + NR^2\cos^2 u = 0$ folgt, dass das Product von je vier in dieselbe Richtung fallenden Halbmessern einer beliebigen Curve C der in Rede stehenden Art constant, nämlich $M = e^2 e_1^2$ ist. Das Product je zweier solcher vier Halbmesser, welche vom Mittelpunkte aus nach einer Seite hin liegen, ist daher ebenfalls constant, nämlich ee_1. Die Endpunkte dieser beiden Halbmesser können sonach als conjugirte Pole betrachtet werden in Bezug auf einen vom Mittelpunkte O der Curve aus mit dem Halbmesser $r = \sqrt{ee_1}$ beschriebenen Kreis, so dass also jeder in der Curve C liegende Punkt seinen conjugirten Pol ebenfalls in C hat.

Seien nun E und H die reelle Ellipse und Hyperbel, aus welchen nach §. 6 die Curve C abgeleitet werden kann, und P ein in C liegender

Punkt, seien ferner K und L, K_1 und L_1 die respectiven Tangenten, welche von P an E und H gezogen werden können. Man bilde nun von dieser ganzen Figur in Bezug auf den vorhin erwähnten Kreis die Polarfigur, und es seien respective e und h, p, k und l, k_1 und l_1 die den E und H, P, K und L, K_1 und L_1 entsprechenden polaren Elemente, also e eine Ellipse, h eine Hyperbel, p eine Gerade, k und l ihre Durchschnittspunkte mit e, k_1 und l_1 ihre Durchschnittspunkte mit h. Bewegt sich nun P auf C fort und bilden folglich die Tangenten K und L den constanten Winkel μ, K_1 und L_1 den constanten Winkel μ_1, so muss die Ellipsensehne kl, welche auf dem gleichzeitig sich bewegenden p liegt, von O aus fortwährend unter dem constanten Winkel $2R-\mu$, und ebenso die in derselben Geraden liegende Hyperbelsehne $k_1 l_1$ fortwährend unter dem constanten Winkel $2R-\mu_1$ gesehen werden. Wir haben somit den Satz:

Bewegt sich eine reelle Gerade so in der Ebene eines Kegelschnitts, dass das von dem Kegelschnitte interceptirte Stück dieser Geraden vom Mittelpunkte aus fortwährend unter einem constanten (reellen oder imaginären) Winkel oder seinem Nebenwinkel gesehen wird, so giebt es noch einen zweiten Kegelschnitt, in Bezug auf welchen sie sich nach demselben Gesetze bewegt. Beide Kegelschnitte haben gemeinschaftliche Axenrichtungen und proportionale Axen und immer ist der eine von ihnen eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

Fällt man nun von O eine Normale $O\pi$ auf p, so ist der Fusspunkt π derselben offenbar der conjugirte Pol zu P und liegt folglich, nach dem im Eingange dieses Paragraphen Gesagten, ebenfalls auf der Curve C. Da somit die Curve C auch durch Bewegung des Punktes π entstanden gedacht werden kann, so haben wir den Satz:

Unter Beibehaltung der in dem so eben aufgestellten Satze gemachten Voraussetzungen beschreibt der Fusspunkt der Normalen, welche man vom Mittelpunkte auf die bewegte Gerade fällen kann, eine der bisher von uns behandelten Curven vierten Grades.

Die Brennpunkte dieser Curve sind nicht die von e und h, sondern die von E und H, und es muss auch hier die Gleichung $\frac{\text{tang}^2\mu}{\text{tang}^2\mu_1} = \frac{e^2}{e_1^2}$ stattfinden. Nicht zu übersehen ist aber, dass, wenn die Hauptaxen von E und H aufeinander fallen, die Hauptaxe von e auf die Nebenaxe von h fällt und umgekehrt. Für die Curven I_a und I_b fällt also bei dieser Erzeugungsweise, abweichend von der vorigen, die Hauptaxe eines jeden der beiden zugeord-

neten Kegelschnitte auf die Nebenaxe des anderen; für die Curven II dagegen fallen die Hauptaxen beider Kegelschnitte auf einander. Ist μ oder $\mu_1 = 0$, so erhält man die Curven III_a und III_b. Da aber in diesem Falle die Gerade p den betreffenden Kegelschnitt berührt, so haben wir das bemerkenswerthe Resultat:

Die Linien III_a *sind Ellipsen-Fusspunktcurven, die Linien* III_b *Hyperbel-Fusspunktcurven, für welche der Pol im Mittelpunkte liegt.*

Eine genauere Specialisirung der bei dieser zweiten Erzeugungsweise in Betracht kommenden verschiedenen Fälle kann aus §. 8 leicht hergeleitet werden.

Liegnitz, im April 1861.

Démonstration d'une formule de M. *Ostrogradsky* relative au calcul des variations des intégrales multiples.

(Par M. *Sabinine* de Moscou.)

Dans la note suivante j'ai l'intention de m'occuper d'une formule fondamentale du calcul des variations des intégrales multiples. Quoique cette formule, due à M. *Ostrogradsky* et contenue dans le §. 4 de son mémoire sur le calcul des variations, y ait été établie, à l'aide de la méthode infinitésimale, et que plus tard on ait essayé de l'établir par d'autres principes (voir la note de M. *Lindeloff* dans les Comptes rendus de l'académie de Paris, séance du 9 Janvier 1860) j'ose pourtant espérer que la démonstration que je vais en donner méritera l'attention des géomètres par son caractère élémentaire et en même temps rigoureux. Cette démonstration est uniquement fondée sur le principe posé par *Euler* dans son célèbre mémoire intitulé: Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi, Nov. Comm. Ac. Petrop. Tom XVI, 1771, pag. 35, principe qui consiste à remplacer les variations par des différentiations partielles prises par rapport à un paramètre que l'on suppose être contenu dans les variables et que je représenterai par la lettre i. Je n'ai eu besoin d'ajouter rien de nouveau à ce principe, et le seul moyen auquel j'aie eu recours outre cela est la formule bien connue relative aux intégrales multiples et par laquelle on passe d'un système de variables à un autre système propre à remplacer le premier.

Soient donc $x, y, z, \dots$ des variables indépendantes, u une fonction inconnue de ces variables, w une expression donnée en $x, y, z, \dots, u$ et

les différences partielles de u prises par rapport à $x, y, z, \ldots$, enfin soit proposée l'intégrale définie multiple

$$v = \iiint \ldots w\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

prise pour toutes les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui satisfont à l'inégalité

$$L < 0,$$

L étant une fonction de $x, y, z, \ldots$, de sorte qu'aux limites de cette intégrale on ait $L=0$. Pour déterminer la variation de l'intégrale v nous aurons suivant le principe d'*Euler* à considérer l'intégrale définie multiple

$$V_i = \iiint \ldots W_i\, \partial X_i\, \partial Y_i\, \partial Z_i \ldots$$

pour toutes les valeurs de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ qui satisfont à l'inégalité

$$L_i < 0,$$

L_i étant une fonction de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ que nous définirons plus tard. W_i est la même fonction de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$, de U_i et des différences partielles de U_i par rapport à $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ que w l'est de $x, y, z, \ldots$ de u et des différences partielles de u par rapport à $x, y, z, \ldots$. Les variables indépendantes $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ sont des fonctions arbitraires du paramètre i et de $x, y, z, \ldots$, continues pour de petites valeurs de i et telles que pour $i=0$ elles deviennent respectivement égales à $x, y, z, \ldots$. Désignons par les caractéristiques $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ les fonctions de i et de $x, y, z, \ldots$, dont il s'agit de sorte que

$$X_i = \psi_1(i, x, y, z, \ldots), \quad Y_i = \psi_2(i, x, y, z, \ldots), \quad Z_i = \psi_3(i, x, y, z, \ldots), \quad \ldots;$$

les dérivées de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ par rapport à i et pour $i=0$ sont respectivement égales aux variations $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$. De même la variable principale U_i est une fonction arbitraire du paramètre i et de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ continue pour de petites valeurs de i et telle que pour $i=0$ elle devienne égale à u. La dérivée de U_i par rapport à i et pour $i=0$ est égale à la variation de u. La variation totale de u et que nous désignons par δu se compose de deux parties: la première partie revient à la differentielle ordinaire de u, considérée

comme fonction de $x, y, z, \ldots$ et en supposant que les différences de $x, y, z, \ldots$ soient $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$; la seconde partie est la dérivée partielle de U_i pour $i = 0$ par rapport à i prise indépendamment des variables $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$, par conséquent la seconde partie de δu et ce qu'on nomme la variation tronquée de u. Si nous désignons la première partie de δu par la caractéristique D et la seconde partie de δu par la caracteristique Δ, nous aurons

$$\delta u = Du + \Delta u.$$

Les variables $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ étant des fonctions de i et de $x, y, z, \ldots$, à chaque système de valeurs de $x, y, z, \ldots$ répondra, pour i quelconque, un système de valeurs de $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$, et vice versa. On pourra donc introduire les variables les uns pour les autres. Je suppose que la quantité désignée ci-dessus par L_i soit ce que devient L, lorsque pour $x, y, z, \ldots$ on y introduit leurs valeurs en $i, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$, de sorte que l'équation $L_i = 0$ soit le resultat de l'élimination entre les équations $L = 0$, $X_i = \psi_1(i, x, y, z, \ldots)$, $Y_i = \psi_2(i, x, y, z, \ldots)$, $Z_i = (i, x, y, z, \ldots), \ldots$ et que toutes les valeurs $x, y, z, \ldots$, qui satisfont à l'inégalité $L < 0$, épuisent toutes les valeurs $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ qui satisfont, pour i quelconque, à l'inégalité $L_i < 0$. Remplaçons maintenant les variables $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ par les fonctions de $x, y, z, \ldots$ qui leur sont égales et introduisons d'après les règles connues ces expressions dans l'intégrale multiple V_i, nous trouverons

$$V_i = \iiint \ldots W_i \mathrm{T} . \partial x \partial y \partial z \ldots,$$

intégrale qui doit être prise pour toutes les valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui satisfont à l'inégalité

$$L < 0,$$

et dans laquelle la lettre T désigne le déterminant

$$\Sigma \pm \frac{\partial X_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial z} \cdots.$$

Cela posé et comme les limites de l'intégrale transformée V sont indépendantes du paramètre i, nous obtiendrons, par les règles de la différentiation sous le signe, l'égalité

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \iiint \ldots \frac{\partial W_i}{\partial i} \mathrm{T}\, \partial x \partial y \partial z \ldots + \iiint \ldots W_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial i} \partial x \partial y \partial z \ldots$$

dans laquelle nous devons poser i égale à zéro pour avoir la variation de l'intégrale v. Pour $i=0$ on aura $\frac{\partial V_i}{\partial i} = \delta v$, $W_i = w$, $\frac{\partial W_i}{\partial i} = \delta w$. La variation de w se compose, comme on sait, de deux parties; la première partie de δw est

$$Dw = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z + \cdots$$

où l'on doit faire varier dans la première des différences $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \ldots$ tout ce qui varie avec x, dans la seconde, tout ce qui varie avec y, dans la troisième, tout ce qui varie avec z et ainsi de suite. La seconde partie de δw est due à l'accroissement Du de la quantité u. Si nous désignons la première partie de δw par la caractéristique D et la seconde partie par la caractéristique Δ, nous aurons

$$\delta w = Dw + \Delta w.$$

De tous les éléments qui composent le déterminant

$$\mathrm{T} = \Sigma \pm \frac{\partial X_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial z} \cdots$$

et dont le nombre égale le carré du nombre des variables, les seules qui ne s'évanouissent pas avec i sont les suivants

$$\frac{\partial X_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial z}, \quad \ldots$$

et ces derniers ont l'unité pour limite. On en conclut que, pour $i=0$, T converge vers l'unité et que le seul terme de $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial i}$ qui ne s'évanouisse pas avec i est le suivant:

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial z} \cdots\right).$$

Comme d'ailleurs $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ sont les limites vers lesquelles convergent $\frac{\partial X_i}{\partial i}, \frac{\partial Y_i}{\partial i}, \frac{\partial Z_i}{\partial i}, \ldots$ on arrive à ce résultat que pour $i=0$ on a

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial i} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \cdots.$$

A l'aide de ces valeurs la limite pour $i=0$ de l'expression de $\frac{\partial V_i}{\partial i}$ obtenue

ci-dessus ou ce qui est la même chose la variation δv prend la forme suivante

$$\delta v = \int\int \ldots (Dw + \Delta w)\, \partial x\, \partial y\, \partial z \cdots + \cdots + \int\int \ldots w \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} + \cdots \right) \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

ou, en introduisant la valeur de Dw:

$$\delta v = \int\int \ldots \left[\frac{\partial (w\, \delta x)}{\partial x} + \frac{\partial (w\, \delta y)}{\partial y} + \frac{\partial (w\, \delta z)}{\partial z} + \cdots \right] \partial x\, \partial y\, \partial z \cdots + \int\int \ldots \Delta w\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

ce qui est la formule de M. *Ostrogradsky,* qu'il s'agissait de démontrer.

Moscou, Janvier 1861.

Ueber *Jacobis* Methode, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren und ihre Ausdehnung auf das *Pfaff*sche Problem, Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

... Die *Jacobi*sche Abhandlung „nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi", deren Herausgabe ich auf Ihren Wunsch übernahm, bin ich im Stande, Ihnen beifolgend in druckfertiger Abschrift zu übersenden. Sie enthält in vollständiger Durchführung jene neue Methode, die *Jacobi* in früheren Veröffentlichungen nur angedeutet, und selbst in seinen Vorlesungen, so viel mir bekannt, nur unvollständig mitgetheilt hat.

Das Studium dieser *Jacobi*schen Abhandlung hat mich darauf geführt, seine Methode von den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die totalen, oder auf die *Pfaff*sche Differentialgleichung auszudehnen, eine Aufgabe, mit welcher sich bereits Herr *Natani* (im vorigen Bande dieses Journals) beschäftigt hat. Herr *Natani* giebt den Grundgedanken an, auf welchem eine neue Theorie des *Pfaff*schen Problems, wenn sie den wiederholt von *Jacobi* ausgesprochenen Forderungen genügen soll, beruhen muss, nämlich auf der Benutzung jedes gefundenen Integrals zur Reduction der vorliegenden totalen Differentialgleichung in eine andere, welche eine Veränderliche weniger enthält, und zugleich ein Integral weniger zu ihrer Integration erfordert. Doch gehört zur vollständigen Durchführung dieses Gedankens die Behandlung der simultanen Systeme, auf welche man bei der successiven Lösung des Problems geführt wird, und zu dieser Behandlung konnte ich die Methode erst aus dem Studium der *Jacobi*schen Abhandlung schöpfen, indem ich seine Methode fast ohne Aenderung geeignet fand, von den partiellen Differentialgleichungen auf das *Pfaff*sche Problem übertragen zu werden.

Aber bei diesen Untersuchungen ergab sich für die Behandlung des *Pfaff*schen Problems ein völlig neuer Gesichtspunkt. Spricht man die Aufgabe dahin aus, dass dem Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

die Gestalt

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

gegeben werden solle, so findet man nach der gewöhnlichen Methode, dass $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$\Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

sind, wo R die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik} bedeutet. Aber man kann nachweisen, *dass die Functionen f vollkommen definirt werden durch ein System von* $\frac{n.n+1}{2}$ *simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Von diesen sind n in der obigen Gleichung enthalten; die übrigen $\frac{n.n-1}{2}$ sind durch die Gleichung gegeben:

$$\Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} = 0,$$

in welcher für μ, ν alle möglichen Combinationen von einander verschiedener Indices zu setzen sind. Von diesen Gleichungen ausgehend, kann man für das *Pfaff*sche Problem eine Integrationsmethode aufstellen, welche zu der von *Jacobi* für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gefundenen das genaue Analogon bildet.

Die oben angegebenen Differentialgleichungen besitzen noch die sehr merkwürdige Eigenschaft, dass das Theorem *Poissons* in der einfachsten Weise sich auf dieselben ausdehnen lässt, was auch für das *Pfaff*sche Problem unter Umständen wesentliche Vortheile bietet. Bezeichnet man nämlich durch (φ) und $[\psi, \chi]$ die beiden Ausdrücke:

$$(\varphi) = \Sigma\Sigma \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\psi, \chi] = \Sigma\Sigma \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k},$$

so kann man leicht folgende Sätze nachweisen:

1. *Sind φ, ψ, χ Lösungen der Gleichung*

$$(\varphi) = 0,$$

so sind die Ausdrücke

$$[\varphi, \psi], \; [\psi, \chi], \; [\chi, \varphi]$$

Multiplicatoren, und also ihre Quotienten neue Lösungen derselben Gleichung.

2. *Betrachtet man in der Gleichung*

$$[\varphi, \psi] = 0$$

ψ als gegeben, und hat man sodann zwei Lösungen φ, χ dieser Gleichung gefunden, so ist auch $[\varphi, \chi]$ eine Lösung derselben.

Man sieht also, dass im Allgemeinen für die Gleichung $(\varphi) = 0$ aus drei Lösungen, für die Gleichung $[\varphi, \psi] = 0$ aus zwei Lösungen alle übrigen durch Differentiation abgeleitet werden können.

Carlsruhe, im März 1861.

Ueber die Knotenpunkte der *Hesse*schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Die Frage nach denjenigen Punkten, deren Polaren, genommen in Bezug auf eine Oberfläche dritter Ordnung, in ein Ebenenpaar zerfällt, habe ich in einem anderen Aufsatze *) (dieses Journal Bd. 58, p. 109) mit der Transformation der homogenen Gleichung dritter Ordnung mit vier Veränderlichen in die Summe von fünf Cuben in Verbindung gebracht, und daraus Resultate abgeleitet, welche mit denen des Herrn *Steiner* in Einklang stehen. Aber die Möglichkeit dieser Transformation, welche nur aus der Anzahl der Constanten geschlossen wird, ist an sich nicht unzweifelhaft: um so mehr als, wie ich nachgewiesen habe, eine ähnliche Transformation bei den Curven vierter Ordnung sich als im Allgemeinen *nicht* möglich herausstellt, obgleich bei derselben Constanten in genügender Anzahl vorhanden sind. Ich werde daher die Frage nach den gedachten Polen, indem ich von einem allgemeineren Gesichtspunkte ausgehe, abermals aufnehmen, und werde ihre Existenz direct beweisen, sowie den Weg sie zu finden aufstellen, wodurch dann zugleich das Problem jener Transformation dem Principe nach erledigt wird.

Es stellt sich dabei zunächst eine allgemeine Eigenschaft der *Hesse*schen Fläche dar, welche einen wichtigen Platz unter den schönen Eigenschaften dieser Fläche einzunehmen scheint; die Eigenschaft nämlich, *dass die einer Fläche n^{ter} Ordnung angehörige Hessesche Fläche immer nothwendig* $10(n-2)^3$

---

*) In der angeführten Abhandlung ist das Problem auf eine Gleichung fünften Grades zurückgeführt, deren Aufstellung wesentlich auf der Voraussetzung beruhte, dass die Ordnung der Invarianten einer Oberfläche dritter Ordnung immer durch 8 theilbar sei. Dies ist, wie sich aus einer kürzlich erschienenen Abhandlung des Herrn *Salmon* ergiebt (Proceedings of the Royal Society of London 1860 pag. 229), unrichtig; die Gleichung kann daher auf die angegebene Art nicht gebildet werden. Im gegenwärtigen Aufsatze findet sich ein allgemeines Mittel, beliebig viel Gleichungen fünften Grades aufzustellen, welche das Problem wirklich lösen. — Ich bemerke noch, dass in dem Satze, p. 111 jenes Aufsatzes Zeile 10 v. u. immer der Ausdruck „Kegel" statt „Oberfläche mit einem Knotenpunkt" gebraucht ist. Der betreffende Satz muss so lauten:

Soll die erste Polare einen Knotenpunkt haben, so muss der Knotenpunkt auf der Determinantenfläche liegen, der Pol aber auf einer anderen Fläche ($\Omega = 0$). *Liegt sodann der Pol insbesondere auch auf der Fläche* $u = 0$, *so liegt der Knotenpunkt auf der Berührungscurve von* $\Delta = 0$, $F = 0$.

Knotenpunkte von ganz bestimmter Natur besitzt. Ihr entspricht eine andere, bisher nicht betrachtete Fläche, *welche immer ebensoviel gerade Linien enthält.*

Der Rest der Abhandlung beschäftigt sich mit der Auflösung der Gleichung zehnten Grades, durch welche jene Knotenpunkte für Oberflächen dritter Ordnung bestimmt werden; was dann von selbst auf die fragliche Transformation leitet.

§. 1.

Ueber Knotenpunkte der Polaren und die zugehörigen Pole.

Es sei $u = 0$ die Gleichung einer Oberfläche n^{ter} Ordnung, u eine homogene Function von x_1, x_2, x_3, x_4. Bezeichnen wir ferner durch u_i und u_{ik} die ersten und zweiten Differentialquotienten von u, so ist die Polare eines Punktes y_1, y_2, y_3, y_4 die Oberfläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(1.)\qquad y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3+y_4u_4 = 0;$$

und die Bedingung, dass diese Polare im Punkte x einen Knotenpunkt habe, ist dargestellt durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} y_1u_{11}+y_2u_{12}+y_3u_{13}+y_4u_{14} = 0, \\ y_1u_{21}+y_2u_{22}+y_3u_{23}+y_4u_{24} = 0, \\ y_1u_{31}+y_2u_{32}+y_3u_{33}+y_4u_{34} = 0, \\ y_1u_{41}+y_2u_{42}+y_3u_{43}+y_4u_{44} = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich der bekannte Satz, dass die Knotenpunkte solcher Polaren immer auf der *Hesseschen Fläche*

$$(3.)\qquad \Delta = 0$$

liegen, so wie umgekehrt, dass jeder Punkt dieser Fläche als Knotenpunkt einer Polare anzusehen ist.

Die zugehörigen Pole liegen auf einer anderen Fläche, welche durch Elimination der x aus den Gleichungen (2.) entspringt. Ihre Gleichung sei

$$(4.)\qquad \Omega = 0;$$

dieselbe ist von der $4(n-2)^{3\text{ten}}$ Ordnung. Denn das Eliminationsresultat ist von der $(n-2)^{3\text{ten}}$ Ordnung für die Coefficienten jeder der Gleichungen (2.), also von der $4(n-2)^{3\text{ten}}$ für sämmtliche Coefficienten, und von derselben Ordnung für die Grössen y, welche in diesen Coefficienten auf lineare Weise enthalten sind. Nach den Bezeichnungen des Herrn *Steiner* würde die Fläche (3.) *Kernfläche,* die Fläche (4.) *conjugirte Kernfläche* zu nennen sein. (Vergl. dieses Journal Bd. 47, p. 4).

Die Gleichung (4.) kann man für die Flächen dritter und vierter Ordnung leicht bilden. Für die Flächen dritter Ordnung fällt sie mit der Gleichung (3.) zusammen, da in den Gleichungen (2.) alsdann offenbar die y mit den x vertauscht werden dürfen. Für die Flächen vierter Ordnung bildet man sie leicht analog den Principien, welche Herr *Hesse* im 41sten Bande dieses Journals niedergelegt hat. In der That kann immer die Aufstellung der Gleichung (4.) mit der Aufstellung der Bedingung als identisch angesehen werden, unter welcher eine Fläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einen Knotenpunkt hat. Die Aufstellung dieser Bedingung für eine Fläche dritter Ordnung $u=0$ erfordert die Elimination der x aus den Gleichungen

$$(5.)\quad u_1=0,\quad u_2=0,\quad u_3=0,\quad u_4=0.$$

Nach den von Herrn *Hesse* aufgestellten Sätzen verschwinden aber dann nicht bloss Δ, sondern auch die ersten Differentialquotienten:

$$(6.)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_4}=0,$$

welche von der dritten Ordnung sind. Multiplicirt man dann die Gleichungen (5.) mit x_1, x_2, x_3, x_4 und verbindet die erhaltenen Gleichungen mit (6.), so hat man 20 Gleichungen, in welchen die 20 Producte $x_i x_h x_k$ auf lineare Weise vorkommen. Betrachtet man also diese Grössen als einfache Unbekannte und setzt die Determinante des Systems gleich Null, so ist dies die Bedingung, unter welcher die Fläche $u=0$ einen Knotenpunkt hat. Die erhaltene Gleichung ist in der That von der Ordnung $16+4.4=32$ für die Coefficienten von u, wie es sein muss. Setzt man in dieser Gleichung für die Coefficienten von u die linearen Ausdrücke in den y, welche die Coefficienten der Gleichung (1.) bilden, so erhält man die Gleichung $\Omega=0$, welche gesucht wurde, für die Flächen 4ter Ordnung.

§. 2.

Ueber diejenigen Knotenpunkte, welche unendlich vielen Polaren gemeinsam sind.

Unter den mit einem Knotenpunkte begabten Polaren giebt es insbesondere gewisse Schaaren, deren Knotenpunkte in einen einzigen Punkt zusammenfallen; während zugleich die zugehörigen Pole eine gerade Linie bilden. Dies geschieht immer, wenn die Werthe der x so gewählt werden, dass die Gleichungen (2.) in Bezug auf die y sich auf zwei von einander verschiedene

Gleichungen reduciren. Der Pol y liegt dann, da seine Coordinaten nur zwei linearen Gleichungen zu genügen haben, im Durchschnitt zweier Ebenen an beliebiger Stelle, und man hat also unendlich viel Polaren, welche sämmtlich in *einem* Punkte x einen Knotenpunkt haben. Für einen solchen Punkt x müssen aber, ausser Δ, auch sämmtliche Unterdeterminanten von Δ verschwinden; oder es müssen gleichzeitig die 10 Gleichungen

$$(7.)\qquad \Delta_{ik}=0$$

erfüllt sein, wo Δ_{ik} die dem Element u_{ik} entsprechende Unterdeterminante bedeutet.

Ich werde im Folgenden zeigen, dass man in der That den Gleichungen (7.) immer gleichzeitig genügen kann, und zwar durch $10(n-2)^3$ verschiedene Werthsysteme. Es giebt also ebensoviel Punkte in $\Delta=0$, welche Knotenpunkte von unendlich vielen Polaren werden: und es ist zu bemerken, dass diese Punkte zugleich Knotenpunkte auch von $\Delta=0$ sind; denn für dieselben ist offenbar

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}=\Sigma_\mu \Sigma_\nu \Delta_{\mu\nu}\,.\,u_{\mu\nu i}=0,$$

welches auch der Index i sein mag. Diesen Knotenpunkten entsprechen ebensoviel Gerade, in welche sich die zugehörigen Pole ausbreiten; und diese Geraden liegen daher auf der Fläche $\Omega=0$. Man hat sonach folgendes Theorem:

Theorem 1.

Die Fläche $4(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Delta=0$, in welcher sämmtliche Knotenpunkte von Polaren liegen, die aus einer Fläche n^{ter} Ordnung entspringen, enthält selbst $10(n-2)^3$ Knotenpunkte; jeder dieser $10(n-2)^3$ Punkte kann Knotenpunkt von unendlich vielen Polaren werden, und die zugehörigen Pole bilden $10(n-2)^3$ Gerade. Alle Pole aber, deren Polaren einen Knotenpunkt haben, liegen auf einer Fläche $4(n-2)^{3\text{ter}}$ Ordnung $\Omega=0$; und diese enthält also nothwendig jene $10(n-2)^3$ Geraden.

§. 3.

Ueber die Anzahl derjenigen Punkte, welche Knotenpunkte von unendlich vielen Polaren werden.

Da es von vorn herein keineswegs feststeht, ob die 10 Gleichungen (7.) überhaupt eine gemeinschaftliche Lösung zulassen, so kann man die Unter-

suchung dieser Gleichungen in der Weise führen, dass man zuerst die gemeinschaftlichen Lösungen von irgend dreien derselben untersucht, und sodann diejenigen, welche diesen Gleichungen eigenthümlich sind, von denjenigen scheidet, welche auch den übrigen Gleichungen des Systems zukommen, und also der vorliegenden Frage angehören.

Ich betrachte daher zunächst die drei Gleichungen

$$(8.)\quad \Delta_{11}=0,\quad \Delta_{22}=0,\quad \Delta_{12}=0,$$

welche sämmtlich Oberflächen von der $3(n-2)^{ten}$ Ordnung darstellen, und also im Ganzen $(3(n-2))^3=27(n-2)^3$ Schnittpunkte ergeben. In Folge der bekannten Gleichungen, denen die Unterdeterminanten zu genügen haben, ziehen die Gleichungen (8.) die folgenden Systeme nach sich:

$$(a.)\quad \begin{cases} u_{31}\Delta_{31}+u_{41}\Delta_{41}=\Delta, \\ u_{32}\Delta_{31}+u_{42}\Delta_{41}=0, \\ u_{33}\Delta_{31}+u_{43}\Delta_{41}=0, \\ u_{34}\Delta_{31}+u_{44}\Delta_{41}=0, \end{cases}\qquad (b.)\quad \begin{cases} u_{31}\Delta_{32}+u_{41}\Delta_{42}=0, \\ u_{32}\Delta_{32}+u_{42}\Delta_{42}=\Delta, \\ u_{33}\Delta_{32}+u_{43}\Delta_{42}=0, \\ u_{34}\Delta_{32}+u_{44}\Delta_{42}=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können im Allgemeinen nicht anders bestehen, als wenn

$$(9.)\quad \Delta=0,\quad \Delta_{31}=0,\quad \Delta_{41}=0,\quad \Delta_{32}=0,\quad \Delta_{42}=0.$$

Aber hievon bilden die Fälle eine Ausnahme, in welchen jedes der Systeme a, b sich auf zwei Gleichungen zur Bestimmung von Δ_{31}, Δ_{41}, Δ_{32}, Δ_{42} reducirt, bei deren einer wenigstens rechts nicht Null steht. Dies kann, wie man sogleich sieht, nur der Fall sein, wenn

$$(10.)\quad u_{33}=0,\quad u_{34}=0,\quad u_{44}=0,$$

wodurch die letzten beiden Gleichungen sowohl in a als in b identisch verschwinden. Bei jeder anderen Annahme wird man mit Nothwendigkeit zu der Gleichung $\Delta=0$ geführt, und hiedurch zu einem zweiten Ausnahmefall, wo nämlich Δ verschwindet, und zugleich jedes der Systeme a, b sich auf eine einzige Gleichung reducirt. Dies geschieht immer, wenn man eine Grösse λ so bestimmen kann, dass

$$(11.)\quad \begin{cases} u_{31}=\lambda u_{41}, \\ u_{32}=\lambda u_{42}, \\ u_{33}=\lambda u_{43}, \\ u_{34}=\lambda u_{44}. \end{cases}$$

Man hat also unter den gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen (8.) folgende drei Classen zu unterscheiden:

1. Es bestehen die Gleichungen (10.), welche $(n-2)^3$ Systeme von Lösungen haben. Alsdann sind in der That die Gleichungen (8.) erfüllt, da

$$(12.)\quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix},\quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} & u_{14} \\ u_{31} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix},\quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{23} & u_{24} \\ u_{13} & u_{33} & u_{34} \\ u_{14} & u_{34} & u_{44} \end{vmatrix}.$$

Aber es verschwinden nicht sämmtliche Δ_{ik}, sondern alle übrigen Δ_{ik} bleiben, wie man sich leicht überzeugt, im Allgemeinen von Null verschieden. In der That kann man das gleichzeitige Bestehen sämmtlicher Gleichungen (7.) dadurch ausdrücken, dass der Ausdruck

$$(13.)\quad \Theta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & y_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{vmatrix}$$

für alle Werthe der y verschwinden soll. Beim Bestehen der Gleichungen (10.) aber ist

$$\Theta' = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & 0 & 0 & y_3 \\ u_{41} & u_{42} & 0 & 0 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{vmatrix},$$

wo im Allgemeinen nur die Coefficienten von y_1^2, y_2^2, $y_1 y_2$ verschwinden. Die Gleichungen (10.) geben also keine dem Systeme (7.) gemeinsame Lösung. Auch überzeugt man sich leicht, dass die Lösungen der Gleichungen (10.) den Gleichungen (8.) nur einfach angehören, indem zwischen den Differentialien der Grössen Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{22} keine Beziehung obwaltet. Es wird nämlich, die Gleichungen (10.) vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} d\Delta_{11} &= 2u_{24}u_{23}du_{34} - u_{24}^2 du_{33} - u_{23}^2 du_{44}, \\ d\Delta_{22} &= 2u_{14}u_{13}du_{34} - u_{14}^2 du_{33} - u_{13}^2 du_{44}, \\ d\Delta_{12} &= (u_{14}u_{23} + u_{24}u_{13})du_{34} - u_{14}u_{24}du_{33} - u_{13}u_{23}du_{44}. \end{aligned}$$

Die Determinante der rechten Theile ist

$$(u_{13}u_{24} - u_{23}u_{14})^3,$$

was im Allgemeinen nicht Null ist. Aus

$$d\Delta_{11}=0,\quad d\Delta_{22}=0,\quad d\Delta_{12}=0$$

folgt also

$$du_{33}=0,\quad du_{34}=0,\quad du_{44}=0,$$

und also geben die Gleichungen (10.) nicht mehrfache Lösungen von (8.), wenn die Gleichungen (10.) nicht selbst Doppellösungen enthalten. Dies zeigt, dass die Gleichungen (10.) im Allgemeinen nicht mehr als $(n-2)^3$ Lösungen der Gleichungen (8.) repräsentiren können.

2. Es bestehen die Gleichungen (11.). In diesem Falle verschwinden ausser Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} noch einige andere Unterdeterminanten, nämlich

$$\Delta_{13},\quad \Delta_{14},\quad \Delta_{23},\quad \Delta_{24},$$

und nur Δ_{33}, Δ_{34}, Δ_{44} bleiben von Null verschieden. Auch diese Lösungen gehören also nicht dem ganzen Systeme (7.) an. Eliminirt man aus (11.) die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4, so bleibt eine Resultirende, welche für die Coefficienten jeder der Gleichungen vom $(n-2)^{3\text{ten}}$ Grade, und also für die Coefficienten von u, also auch für λ, vom $4(n-2)^{3\text{ten}}$ Grade ist. Die Gleichungen (11.) ergeben also $4(n-2)^3$ Werthsysteme der x. Aber dieselben kommen den Gleichungen (8.) nicht einfach sondern mehrfach zu. Bildet man nämlich die Differentiale von Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12}, was etwa geschehen kann, indem man in Θ die Grössen y_3, y_4 durch Null ersetzt, so dass

$$\Theta = -\{\Delta_{11}y_1^2+\Delta_{22}y_2^2+2\Delta_{12}y_1y_2\}$$

wird, und $d\Theta$ bildet, so kommt mit Hülfe der Gleichungen (11.)

$$d\Theta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & du_{13} & u_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & du_{23} & u_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & du_{33} & u_{34} & \theta \\ u_{41} & u_{42} & du_{43} & u_{44} & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & du_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & du_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & du_{34} & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & du_{44} & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & du_{13} & u_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & du_{23} & u_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & du_{33} & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & du_{43}-\frac{du_{33}}{\lambda} & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & du_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & du_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & du_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & du_{44}-\frac{du_{34}}{\lambda} & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ du_{44} - 2\frac{du_{34}}{\lambda} + \frac{du_{33}}{\lambda^2} \right\} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da hier der erste Factor von den y unabhängig ist, so sieht man, dass die Differentialien von Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12}, wenn die Gleichungen (11.) bestehen, sich nur durch einen Factor unterscheiden; oder *dass die Oberflächen*

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{22} = 0, \quad \Delta_{12} = 0$$

in jedem durch das Bestehen der Gleichungen (11.) *herbeigeführten Schnittpunkte eine gemeinsame Tangentenebene haben.*

§. 4.

Ueber die Anzahl von Schnittpunkten, welche in einem Berührungspunkte dreier Oberflächen zusammenfallen.

Es entsteht hier die Frage, *wie viel Schnittpunkte dreier Oberflächen durch einen gemeinsamen Berührungspunkt absorbirt werden.* Zur Lösung dieser Frage gelangt man einfach auf folgende Weise.

Ich denke mir ein beliebiges dreiaxiges Coordinatensystem, lege den Anfangspunkt in den Berührungspunkt, und nehme die gemeinsame Tangentenebene zur Ebene der x. Sodann suche ich, wenn $u=0$, $v=0$, $w=0$ die Gleichungen der gegebenen Oberflächen bedeuten, diejenigen Schnittpunkte, welche in der unmittelbaren Nähe des Anfangspunktes liegen, oder diejenigen Lösungen jener Gleichungen, für welche x, y, z sehr kleine Werthe erhalten. Mit Rücksicht hierauf aber kann man sich offenbar u, v, w in der Form denken:

$$(14.) \quad \begin{cases} u = x + f(x, y, z) + \cdots \\ v = x + \varphi(x, y, z) + \cdots \\ w = x + \psi(x, y, z) + \cdots, \end{cases}$$

wo f, φ, ψ homogene Functionen zweiter Ordnung von x, y, z bedeuten, und wo die höheren Ordnungen vernachlässigt sind. Bildet man hieraus die homogenen Gleichungen zweiter Ordnung:

$$f - \varphi = 0, \qquad f - \psi = 0,$$

so erhält man offenbar vier Werthe von $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, und eine der Gleichungen (14.) giebt sofort x auf lineare Weise.

Die Substitution aber der Ausdrücke (14.) für u, v, w bedeutet nichts anderes, als dass man für die drei Flächen drei Flächen zweiter Ordnung setzt, welche denselben möglichst nahe kommen. Nun schneiden sich drei Flächen zweiter Ordnung in acht Punkten, während so eben nur vier Schnittpunkte gefunden wurden, deren Coordinaten von Null verschieden sind. Die vier übrigen Schnittpunkte müssen also in den Berührungspunkt gefallen sein. Diese letzteren kommen aber auch den ursprünglichen Oberflächen zu; und man hat also den Satz:

Theorem 2.

In einem Berührungspunkte dreier Oberflächen fallen im Allgemeinen vier Schnittpunkte derselben zusammen.

§. 5.

Fortsetzung der Untersuchung des §. 3.

Ich nehme jetzt den Gang der früheren Betrachtungen wieder auf. Es ist oben bewiesen, dass die Oberflächen $\Delta_{11}=0$, $\Delta_{12}=0$, $\Delta_{22}=0$ $4(n-2)^3$ gemeinsame Schnittpunkte haben, welche den Gleichungen (11.) entsprechen. Aber diese Punkte sind zugleich gemeinsame Berührungspunkte der Oberflächen, und gelten also für je vier Schnittpunkte. Die Gleichungen (11.) vertreten also $16(n-2)^3$ Schnittpunkte der Flächen $\Delta_{11}=0$, $\Delta_{12}=0$, $\Delta_{22}=0$.

Als Corollar zu diesen Untersuchungen kann folgende Bemerkung dienen. Durch eine Coordinatentransformation gehen die Ausdrücke Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} in folgende Formen über:

$$\Sigma\Sigma\Delta_{ik}p_ip_k,\quad \Sigma\Sigma\Delta_{ik}q_iq_k,\quad \Sigma\Sigma\Delta_{ik}p_iq_k,$$

wo die p, q beliebige Constanten bezeichnen, deren Werthe von der gewählten Transformation abhängen. Man hat also für diese Flächen den Satz:

Theorem 3.

Die drei Flächen $3(n-2)^{ter}$ *Ordnung*

$$\Sigma\Sigma\Delta_{ik}p_ip_k = 0,$$
$$\Sigma\Sigma\Delta_{ik}q_iq_k = 0,$$
$$\Sigma\Sigma\Delta_{ik}p_iq_k = 0,$$

in welchen die p, q *irgend welche Constanten bezeichnen, berühren sich jederzeit in* $4(n-2)^3$ *Punkten.*

Dies Theorem hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Nimmt man die Polare des Punktes y in Bezug auf die Polare des Punktes z, so gelangt man zu der Fläche $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(a.)\qquad \Sigma\Sigma u_{ik}\, y_i z_k = 0,$$

welche man die *zweite Polare* von y und z, oder, wenn beide Punkte zusammenfallen, die zweite Polare dieses einen Punktes nennen kann. Rückt nun y auf der Ebene

$$P = p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y_4 = 0,$$

z auf der Ebene

$$Q = q_1z_1+q_2z_2+q_3z_3+q_4z_4 = 0,$$

so kann man den letzteren Punkt, indem der erstere beliebig bleibt, stets so wählen, dass die Oberflächen $(a.)$, welche bei beliebigen, unendlich kleinen Verschiebungen von y, z entstehen, sich sämmtlich in den nämlichen Punkten x durchschneiden. Die Punkte x beschreiben dann die Fläche $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\Sigma\Sigma \Delta_{ik} p_i q_k = 0,$$

und man kann sie die *zweite Polare der beiden Ebenen P und Q* nennen. Fallen P und Q zusammen, so erhält man die zweite Polare von P, indem man auch y immer mit z zusammenfallen lässt.

In Rücksicht auf diese Bezeichnung kann man aus dem ersten und dritten Theorem folgendes ableiten:

Theorem 4.

Die zweite Polare einer Ebene P, die einer Ebene Q und die zweite Polare beider Ebenen gehen erstlich immer durch $10(n-2)^3$ bestimmte Punkte, die Knotenpunkte von $\Delta = 0$; sie berühren sich zweitens immer in $4(n-2)^3$ Punkten.

Nach einem bekannten Determinatensatz findet sich ferner leicht, *dass die zweite Polare von P die Hessesche Fläche berührt; ebenso die zweite Polare von Q; und dass die zweite Polare von P und Q durch beide Berührungscurven hindurchgeht.*

Es bleibt endlich der letzte Fall des §. 3 zu betrachten übrig.

3. Es finden weder die Gleichungen (10.) noch die Gleichungen (11.) statt. In diesem Fall geben die letzten Gleichungen der Systeme $(a.)$, $(b.)$ sofort:

$$\Delta_{13} = 0,\quad \Delta_{23} = 0,\quad \Delta_{14} = 0,\quad \Delta_{24} = 0,$$

also auch $\Delta = 0$. In Folge dessen kann man aber den Systemen ($a.$), ($b.$) noch die Gleichungen hinzufügen:

$$u_{33}\Delta_{33}+u_{34}\Delta_{34}=0, \quad u_{33}\Delta_{34}+u_{34}\Delta_{44}=0,$$
$$u_{43}\Delta_{33}+u_{44}\Delta_{34}=0, \quad u_{43}\Delta_{34}+u_{44}\Delta_{44}=0.$$

Da nun weder die Gleichungen (10.) noch die Gleichungen (11.) bestehen sollen, so folgt hieraus nothwendig:

$$\Delta_{33}=0, \quad \Delta_{34}=0, \quad \Delta_{44}=0.$$

Es ist also bewiesen, *dass für alle Lösungen der Gleichungen*

$$\Delta_{11}=0, \quad \Delta_{22}=0, \quad \Delta_{12}=0,$$

welche nicht aus den Gleichungen (10.) *oder* (11.) *hervorgehen, sämmtliche* Δ_{ik} *verschwinden.* Es war aber die Gesammtzahl aller Lösungen $27(n-2)^3$, die der aus (10.) entspringenden $(n-2)^3$, die der aus (11.) entspringenden $16(n-2)^3$. Sonach bleibt als Anzahl der gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen $\Delta_{ik}=0$:

$$27(n-2)^3-(n-2)^3-16(n-2)^3 = 10(n-2)^3.$$

Hierdurch ist das Theorem 1. bewiesen.

§. 6.

Bildung der Gleichung zehnten Grades, von welcher bei den Oberflächen dritter Ordnung die Aufsuchung der 10 Knotenpunkte abhängt.

Es ist sehr leicht für Oberflächen dritter Ordnung die Gleichung zehnten Grades wirklich aufzustellen, von welcher die Aufsuchung der betreffenden 10 Knotenpunkte abhängt. Hierzu führt die Aufstellung derjenigen zugehörigen Form, welche gleich Null gesetzt, das Product der Gleichungen jener Knotenpunkte in Ebenencoordinaten darstellt.

Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 die Coordinaten einer, durch einen der 10 Knotenpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 gelegten Ebene. Dann ist immer

$$(15.) \qquad v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4 = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit den zehn Quadraten und Producten der x, so erhält man 10 Gleichungen, welche linear sind in Bezug auf die 20 Producte $x_ix_kx_h$. Für dieselben Grössen linear sind aber auch die 10 Gleichungen $\Delta_{ik}=0$. Eliminirt man also aus diesen 20 Gleichungen die 20 Unbekannten $x_ix_kx_h$, so ist die resultirende Determinante die gesuchte Gleichung in v_1, v_2, v_3, v_4, welche das Product der Gleichungen aller 10 Knotenpunkte

darstellt. Der linke Theil der Gleichung ist eine zugehörige Form zehnter Ordnung von u und nothwendig in 10 lineare Factoren auflösbar. Es ist möglich, dass die gedachte zugehörige Form noch eine Invariante achter oder sechzehnter Ordnung als Factor enthalte, worüber hier nicht entschieden werden soll.

Setzt man aber

$$v_1 = a_1 + \lambda b_1, \quad v_2 = a_2 + \lambda b_2, \quad v_3 = a_3 + \lambda b_3, \quad v_4 = a_4 + \lambda b_4,$$

wo die a, b beliebige Constanten bezeichnen, so geht die soeben aufgestellte Gleichung in eine Gleichung zehnten Grades für λ über. Da zugleich aus (15.) folgt:

$$\lambda = -\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4},$$

so hat λ eine einfache geometrische Bedeutung; es ist λ proportional dem Verhältniss der Abstände des gesuchten Knotenpunktes von zwei beliebig gewählten festen Ebenen, welche durch die Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

dargestellt sind.

Diese Gleichung ist mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades auflösbar.

§. 7.

Ueber die besondere Lage dieser Knotenpunkte und der entsprechenden Geraden. Das *Steiner*sche Pentaeder.

Herr *Steiner* hat im 55sten Bande dieses Journals auf die besonderen Verhältnisse aufmerksam gemacht, denen diese 10 Knotenpunkte unterworfen sind. Auf dieselben Resultate bin ich sodann in der angeführten Abhandlung, von der Transformation in die Summe von fünf Cuben ausgehend, gekommen. Ich werde aber im Folgenden eine einfache analytische Ableitung der betreffenden Sätze geben, welche sich auf keine angenommene Transformation stützt, sondern direct von den Gleichungen (2.) und (7.) ausgeht, deren Zulässigkeit nachgewiesen wurde.

Zunächst fallen für $n = 3$ die Oberflächen $\Delta = 0$ und $\Omega = 0$, wie schon in §. 1 bemerkt wurde, zusammen. *Die Oberfläche vierter Ordnung $\Delta = 0$ enthält also nicht nur jene 10 Knotenpunkte, sondern auch die 10 Geraden, in welchen die diesen Knotenpunkten entsprechenden Pole liegen können.* Aber die 10 Geraden erhalten noch eine weitere Bedeutung.

Es bezeichne x' einen der 10 Knotenpunkte. Die Gleichung der Polare eines solchen Knotenpunktes ist dann

$$\Sigma\Sigma u'_{ik} x_i x_k = 0,$$

wo u'_{ik} den Ausdruck bezeichnet, in welchen u_{ik} durch Einführung der Coordinaten x' übergeht. Diese Polare ist ein Ebenenpaar, da die aus den u'_{ik} zu bildenden Partialdeterminanten sämmtlich verschwinden sollen. Man kann also immer setzen:

$$\Sigma\Sigma u'_{ik} x_i x_k = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4).$$

Für die Schnittlinie des Ebenenpaares verschwinden offenbar die Differentialquotienten des linken wie des rechten Theils nach sämmtlichen x genommen. Man hat also gleichzeitig die vier Gleichungen:

$$(16.)\qquad u'_{i1} x_1 + u'_{i2} x_2 + u'_{i3} x_3 + u'_{i4} x_4 = 0,$$

welche sich nothwendig auf nur zwei von einander verschiedene reduciren. Dies sind aber die Gleichungen der dem Knotenpunkte x' entsprechenden Geraden; und so hat man den von Herrn *Steiner* aufgestellten Satz:

Theorem 5.

Für eine Fläche dritter Ordnung zerfällt die Polare jedes der 10 Knotenpunkte der Hesseschen Fläche in ein Ebenenpaar; und die Schnittlinie der Ebenen ist die nämliche Linie, auf welcher der Pol liegen muss, damit seine Polare einen Knotenpunkt in jenem Knotenpunkte der Hesseschen Fläche habe.

Ich werde jetzt zeigen, dass auf den Geraden abermals Knotenpunkte von $\Delta = 0$ liegen. Man kann die Frage stellen, ob, wenn x' einen der 10 Knotenpunkte darstellt, der durch die Gleichungen (16.) nicht völlig bestimmte Punkt x sich weiter so bestimmen lässt, dass für ihn selbst sämmtliche Δ_{ik} verschwinden, oder dass für ihn der Ausdruck Θ in (13.) unabhängig von den Werthen der y gleich Null sei. Um dies zu untersuchen, multiplicire ich die symmetrische Determinante

$$\Theta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & y_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & y_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{vmatrix}$$

mit dem Quadrate der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wo die Grössen p, q, r beliebige Constanten bezeichnen, für welche D nicht verschwindet. Das Resultat kann dann bekanntlich wieder in der Form einer symmetrischen Determinante geschrieben werden, wie Herr *Hesse* gezeigt hat. Setzt man der Kürze wegen

$$(17.)\quad \begin{cases} u_{pq} = \Sigma\Sigma u_{ik} p_i q_k, \\ y_p = y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3 + y_4 p_4, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so bemerkt man, dass $u_{x'x'}$ und $u_{x'p}$ etc. wegen der Gleichungen (16.), die auch in der Form

$$0 = u_{1i} x_1' + u_{2i} x_2' + u_{3i} x_3' + u_{4i} x_4'$$

geschrieben werden können, verschwindet; und man erhält:

$$\Theta . D^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y_{x'} \\ 0 & u_{pp} & u_{pq} & u_{pr} & y_p \\ 0 & u_{pq} & u_{qq} & u_{qr} & y_q \\ 0 & u_{pr} & u_{qr} & u_{rr} & y_r \\ y_{x'} & y_p & y_q & y_r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(y_{x'})^2 . \begin{vmatrix} u_{pp} & u_{pq} & u_{pr} \\ u_{pq} & u_{qq} & u_{qr} \\ u_{pr} & u_{qr} & u_{rr} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen (16.) vorausgesetzt, sind also sämmtliche Gleichungen $\Delta_{ik} = 0$ erfüllt, wenn die eine Gleichung

$$(18.)\quad \begin{vmatrix} u_{pp} & u_{pq} & u_{pr} \\ u_{pq} & u_{qq} & u_{qr} \\ u_{pr} & u_{qr} & u_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

für irgend welche Werthe der p, q, r besteht. *Eine* Gleichung aber kann neben den zwei durch (16.) dargestellten Gleichungen sehr wohl erfüllt werden; und da die letzten Gleichungen für die x linear sind, (18.) aber von

der dritten Ordnung, so giebt es drei Werthsysteme, welche diesen Gleichungen genügen. Auf jeder der 10 Geraden giebt es also drei Knotenpunkte. Man bemerkt zugleich, dass in Folge der Gleichungen (16.) x' auch auf der dem Knotenpunkt x entsprechenden Geraden liegen muss; mithin auf allen drei Geraden, welche den aus den Gleichungen (16.), (18.) bestimmten Punkten x entsprechen. Und so hat man das von Herrn *Steiner* herrührende Theorem:

Theorem 6.

Jede der 10 Geraden geht durch drei der 10 Knotenpunkte hindurch, und der zu der Geraden gehörige Knotenpunkt liegt im Schnitt der drei Geraden, welche den gedachten drei Knotenpunkten entsprechen.

Man kann dabei bemerken, dass im Allgemeinen *niemals einer der 10 Knotenpunkte selbst einer derjenigen Knotenpunkte ist, welche der ihm entsprechenden Geraden angehören.* Denn wäre etwa x' ein solcher Knotenpunkt, so könnte man in dem vorhergehenden $x = x'$ setzen. Dann aber reducirten sich die Gleichungen (16.) auf

$$u_i' = 0,$$

d. h. die Oberfläche dritter Ordnung müsste selbst einen Knotenpunkt haben. Und ferner: *Es kann niemals eine der 10 Geraden zugleich einen Knotenpunkt und einen derjenigen Punkte enthalten, welche auf der ihm entsprechenden Geraden liegen.* Dies Letztere sieht man folgendermassen ein: Sei einer der Knotenpunkte bekannt, so wie die ihm zugehörige Gerade. Man kann dann das Coordinatentetraeder so wählen, dass für den Knotenpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, für die entsprechende Gerade $x_3 = x_4 = 0$. Nun kann man ferner die Gleichungen

$$\Delta_{ik} = 0$$

ersetzen durch die 10 Gleichungen

$$(19.)\qquad u_{ik} = \alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k,$$

wo die α, β Constante bedeuten, und

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$
$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen sind, in welche die Polare des aus (19.) gefundenen Knotenpunktes zerfällt, und deren Durchschnitt die ihm entsprechende Gerade ist. Für die vorliegende Annahme muss man also haben

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0,$$

und hienach führen die Gleichungen (19.) auf die weiteren Bedingungen, welche der gewählten Lage des Coordinatensystems entsprechen:

$$u_{114} = u_{124} = u_{134} = u_{144} = u_{224} = u_{234} = u_{244} = 0$$
$$u_{334} = 2\alpha_3\beta_3, \quad u_{444} = 2\alpha_4\beta_4,$$
$$u_{344} = \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3.$$

Sucht man jetzt die auf der Linie $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ gelegenen Knotenpunkte, so findet man dieselben sofort (indem alle anderen Δ_{ik} zusammen mit u_{14}, u_{24}, u_{34}, u_{44} verschwinden) aus der cubischen Gleichung:

$$\Delta_{44} = 0 = \begin{vmatrix} u_{111}x_1 + u_{112}x_2 & u_{112}x_1 + u_{122}x_2 & u_{113}x_1 + u_{123}x_2 \\ u_{112}x_1 + u_{122}x_2 & u_{122}x_1 + u_{222}x_2 & u_{123}x_1 + u_{223}x_2 \\ u_{113}x_1 + u_{123}x_2 & u_{123}x_1 + u_{322}x_2 & u_{133}x_1 + u_{233}x_2 \end{vmatrix};$$

was zur Bestätigung des Vorhergehenden hier angeführt sei. Soll aber eine der zehn Geraden einen der aus dieser cubischen Gleichung entspringenden Punkte mit dem Knotenpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ verbinden, d. h. soll einer der dieser Gleichung entsprechenden Punkte (x) auf der zu einem der andern (x) entsprechenden Geraden liegen, so muss man die Gleichungen haben (nach (2.)):

$$\begin{aligned} u_{111}x_1x_1' + u_{112}(x_1x_2' + x_2x_1') + u_{122}x_2x_2' &= 0, \\ u_{211}x_1x_1' + u_{212}(x_1x_2' + x_2x_1') + u_{222}x_2x_2' &= 0, \\ u_{311}x_1x_1' + u_{312}(x_1x_2' + x_2x_1') + u_{322}x_2x_2' &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{vmatrix} u_{111} & u_{112} & u_{122} \\ u_{211} & u_{212} & u_{222} \\ u_{311} & u_{312} & u_{322} \end{vmatrix} = 0,$$

was im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Die angeführten Bemerkungen gestatten nun eine genauere Einsicht in die gegenseitige Lage der 10 Punkte und der 10 Geraden. Auf den durch irgend einen Knotenpunkt *a* gehenden Geraden liegen im Ganzen 7 Punkte. Nach dem Vorigen kann die zu *a* gehörige Gerade α keinen dieser 7 Punkte enthalten, sie enthält also die noch übrigen drei Punkte *b, c, d*. Diesen Punkten mögen in derselben Folge die durch *a* gehenden Geraden β, γ, δ entsprechen. Durch *b, c, d* gehen noch je zwei andere Gerade, welche nothwendig zu zweien auch durch die ausser *a* auf β, γ, δ liegenden Punkte gehen. Aber die durch *b* gehenden Geraden, welche den auf β liegenden

Punkten entsprechen, dürfen nicht die Linie β selbst treffen; jede dieser Geraden geht daher durch einen Punkt in γ und durch einen in δ, dergestalt, dass beide zusammen beide Punkte von γ und beide Punkte von δ treffen. Ebenso müssen die durch c gehenden Geraden die Punkte von β und δ, die durch d gehenden die Punkte von β und γ treffen. Man bemerkt, dass auf diese Weise drei vollständige Vierecke entstehen, gebildet aus je zweien der Geraden β, γ, δ und aus je einem der durch b, c, d gehenden Paare. Ausser diesen existiren noch zwei vollständige Vierecke in der Figur; sie gehen durch α, und enthalten von den durch b, c, d gehenden anderen Geraden immer je eine. Die Ebenen dieser fünf Vierecke bestimmen völlig die Figur; und sie geben sofort den Satz von dem *Steinerschen Pentaeder:*

Theorem 7.

Die 10 Knotenpunkte sind die Ecken eines vollständigen Pentaeders, und die 10 Geraden die Kanten desselben; und zwar so, dass einem durch drei Ebenen bestimmten Punkte diejenige Gerade entspricht, welche durch die anderen beiden Ebenen bestimmt wird.

Dies Theorem dient unter Anderem dazu die verschiedenen Fälle zu erkennen, welche bei der Gleichung zehnten Grades in Bezug auf die Realität der Wurzeln eintreten können. Die fünf Pentraederflächen sind, die Coefficienten von u als reell vorausgesetzt, entweder sämmtlich reell, oder es sind zwei derselben conjugirt imaginär oder endlich zwei Paare conjugirt imaginär. Demnach sind von den Pentaederecken entweder alle reell oder vier reell oder zwei reell; dasselbe gilt von den entsprechenden Kanten. Bei den Wurzeln der Gleichung zehnten Grades können daher auch im Allgemeinen keine anderen Fälle eintreten, als dass alle reell sind oder vier oder endlich zwei derselben.

Bezeichnet man, wie ich früher gethan, die Ebenen durch 1, 2, 3, 4, 5, ihre Schnittlinien durch je zwei, ihre Schnittpunkte durch je drei Zahlen, so hat man demnach folgende Punkte und entsprechende Geraden:

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
45	35	34	25	24	23	15	14	13	12.

§. 8.

Eigenschaften der Gleichung zehnten Grades.

Die im vorigen Paragraph ausgesprochenen Sätze enthalten ebensoviel Eigenschaften der Gleichung zehnten Grades, welche in §. 6 aufgestellt ist.

Die Wurzeln dieser Gleichung seien, dem Vorigen entsprechend, durch

$$\lambda^{123},\ \lambda^{124},\ \lambda^{125},\ \lambda^{134},\ \lambda^{135},\ \lambda^{145},\ \lambda^{234},\ \lambda^{235},\ \lambda^{245},\ \lambda^{345}$$

bezeichnet. Zwischen diesen Wurzeln bestehen dann gewisse Beziehungen, welche leicht zu entwickeln sind.

Die in §. 6 aufgestellte Gleichung vom 10ten Grade sei

$$(20.)\qquad F(\lambda) = 0.$$

Aus dem System, dessen Eliminationsresultante F ist, folgt aber zugleich

$$(21.)\qquad \mu x_1 = f_1(\lambda),\quad \mu x_2 = f_2(\lambda),\quad \mu x_3 = f_3(\lambda),\quad \mu x_4 = f_4(\lambda),$$

wo μ einen unbestimmten Factor bedeutet, der für jeden der 10 Punkte einen anderen Werth erhalten kann. Die Functionen f kann man immer so wählen, dass sie ganz und vom 9ten Grade für λ sind, so wie endlich, dass sie der identischen Gleichung genügen

$$F = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4) + \lambda(b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4),$$

was übrigens für das Folgende unerheblich ist.

Seien nun λ', λ'', λ''' Wurzeln, welche drei auf einer Geraden liegenden Punkten angehören, λ die Wurzel, welche dem der Geraden entsprechenden Punkte angehört. Es ist oben gezeigt, dass dann zwischen den zu einem der λ', λ'', λ''' gehörigen Coordinaten zwei lineare und eine cubische Gleichung stattfinden, deren Coefficienten nur von den zu λ gehörigen Coordinaten abhängen. Verbindet man etwa die zu λ' gehörigen drei Gleichungen mit der Gleichung

$$0 = (a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3 + a_4 x_4') + \lambda'(b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3' + b_4 x_4')$$

und eliminirt x_1', x_2', x_3', x_4', so erhält man für λ' eine cubische Gleichung, deren Wurzeln offenbar λ', λ'', λ''' sind. Die Coefficienten der Gleichung hängen von den zu λ gehörigen Coordinaten oder vielmehr nur von ihren Verhältnissen ab, und lassen sich also mit Hülfe der Gleichungen (21.) durch λ ausdrücken. Man kann also sofort die einfachen und daher überhaupt alle symmetrischen Verbindungen von λ', λ'', λ''' als rationale Functionen von λ darstellen. Und dies giebt den Satz:

Theorem 8.

Es giebt 10 Combinationen der 10 Wurzeln der Gleichung (20.) *zu dreien, dass jede rationale symmetrische Function solcher drei Wurzeln sich durch eine bestimmte vierte Wurzel ausdrücken lässt.*

Es lässt sich nämlich ausdrücken jede symmetrische Function

$$\begin{array}{llllll}
\text{von} & \lambda^{123}, & \lambda^{124}, & \lambda^{125}, & \text{durch} & \lambda^{345}, \\
- & \lambda^{134}, & \lambda^{135}, & \lambda^{132}, & - & \lambda^{245}, \\
- & \lambda^{145}, & \lambda^{142}, & \lambda^{143}, & - & \lambda^{235}, \\
- & \lambda^{152}, & \lambda^{153}, & \lambda^{154}, & - & \lambda^{234}, \\
- & \lambda^{231}, & \lambda^{234}, & \lambda^{235}, & - & \lambda^{145}, \\
- & \lambda^{241}, & \lambda^{243}, & \lambda^{245}, & - & \lambda^{135}, \\
- & \lambda^{251}, & \lambda^{253}, & \lambda^{254}, & - & \lambda^{134}, \\
- & \lambda^{341}, & \lambda^{342}, & \lambda^{345}, & - & \lambda^{125}, \\
- & \lambda^{351}, & \lambda^{352}, & \lambda^{354}, & - & \lambda^{124}, \\
- & \lambda^{451}, & \lambda^{452}, & \lambda^{453}, & - & \lambda^{123}.
\end{array}$$

Dies erlaubt z. B. sofort eine Gleichung 10ten Grades aufzustellen, deren Wurzeln irgend welche derartige symmetrische Functionen sind. Denn wird die symmetrische Function, welche beliebig gewählt werden kann, durch φ bezeichnet, so hat man immer

$$\varphi(\lambda^{123}, \lambda^{124}, \lambda^{125}) = \psi(\lambda^{345}) \text{ etc.},$$

wo ψ eine rationale Function ist; jede symmetrische Function der 10 Werthe, welche φ für die obigen 10 Combinationen annimmt, ist also eine symmetrische Function aller Wurzeln, und also durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrückbar. Man kann daher auch die Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln diese 10 Werthe sind, durch jene Coefficienten ausdrücken.

Bezeichnen wir die oben erwähnte cubische Gleichung, deren Wurzeln $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ waren, durch:

$$\lambda'^3 - \lambda'^2\varphi(\lambda) + \lambda'\psi(\lambda) - \chi(\lambda) = 0,$$

so besteht offenbar eine ähnliche Gleichung, welche ebenfalls λ' zur Wurzel hat, für jedes λ, dessen entsprechende Gerade durch den zu λ' gehörigen Punkt geht. Solcher Geraden giebt es drei; sind $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ die ihnen entsprechenden Wurzeln, so hat man also auch:

$$\lambda'^3 - \lambda'^2\varphi(\lambda_1) + \lambda'\psi(\lambda_1) - \chi(\lambda_1) = 0,$$
$$\lambda'^3 - \lambda'^2\varphi(\lambda_2) + \lambda'\psi(\lambda_2) - \chi(\lambda_2) = 0.$$

Aus denselben bestimmt sich nothwendig λ' vollständig, da es nur *einen* Punkt giebt, welcher auf den drei zu $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ gehörigen Geraden liegt. Man kann also die vorstehenden drei Gleichungen nach $\lambda', \lambda'^2, \lambda'^3$ auflösen, und erhält,

indem man im Zähler und Nenner des Werthes von λ' den Factor

$$\lambda_1-\lambda_2.\lambda_2-\lambda.\lambda-\lambda_1$$

aufhebt:

$$\lambda' = \Omega(\lambda, \lambda_1, \lambda_2),$$

wo Ω eine rationale symmetrische Function ist. So hat man noch das zweite Theorem:

Theorem 9.

Jede Wurzel der Gleichung (20.) *ist eine rationale symmetrische Function von drei anderen.*

Die Combinationen sind die nämlichen wie zuvor.

Zu diesen Eigenschaften, welche aus der Betrachtung des Pentaeders fliessen, treten andere, welche nur daraus entspringen, dass immer drei Knotenpunkte auf einer Geraden liegen. Es seien x', x'' irgend zwei Knotenpunkte auf einer Geraden; die Coordinaten des dritten auf derselben Linie befindlichen sind dann $\varkappa' x'_i + \varkappa'' x''_i$. Betrachtet man nun die Function Θ, welche einen Knotenpunkt charakterisirt, sobald sie unabhängig von den Werthen der y verschwindet, so verschwindet offenbar dieselbe sowohl für x' als für x'', und sie muss endlich auch für $\varkappa' x' + \varkappa'' x''$ verschwinden. Bezeichnet man also durch Θ', Θ'' die Ausdrücke, in welche Θ für die ersteren beiden Punkte übergeht, so wird die Bedingung dafür, dass Θ für $\varkappa' x' + \varkappa'' x''$ verschwinde,

$$0 = \varkappa'\varkappa''.\left\{\varkappa' \Sigma_h x''_h \frac{\partial\Theta'}{\partial x'_h} + \varkappa'' \Sigma_h x'_h \frac{\partial\Theta''}{\partial x''_h}\right\}$$

oder

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa''} = -\frac{\Sigma_h x'_h \dfrac{\partial\Theta''}{\partial x''_h}}{\Sigma_h x''_h \dfrac{\partial\Theta'}{\partial x'_h}}.$$

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung 10ten Grades, welche diesen Punkten entsprechen, so ist also

$$\lambda = -\frac{\varkappa'(a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4) + \varkappa''(a_1 x''_1 + a_2 x''_2 + a_3 x''_3 + a_4 x''_4)}{\varkappa'(b_1 x'_1 + b_2 x'_2 + b_3 x'_3 + b_4 x'_4) + \varkappa''(b_1 x''_1 + b_2 x''_2 + b_3 x''_3 + b_4 x''_4)}$$

$$= -\frac{\Sigma_m a_m x'_m.\Sigma_h x'_h \dfrac{\partial\Theta''}{\partial x''_h} - \Sigma_m a_m x''_m.\Sigma_h x''_h \dfrac{\partial\Theta'}{\partial x'_h}}{\Sigma_m b_m x'_m.\Sigma_h x'_h \dfrac{\partial\Theta''}{\partial x''_h} - \Sigma_m b_m x''_m.\Sigma_h x''_h \dfrac{\partial\Theta'}{\partial x'_h}}.$$

Zähler und Nenner rechts sind sowohl in Bezug auf die x' als auf die x'' homogen vom zweiten Grade. Der rechte Theil ist also als eine symmetrische Function von λ', λ'' darstellbar, und zwar ist sowohl Zähler als Nenner eine solche, jedesmal multiplicirt mit $\lambda'-\lambda''$, was im Resultat sich aufhebt.' Da nun jeder Knotenpunkt auf drei Geraden liegt, so ist jede Wurzel dreimal als dieselbe symmetrische Function von zwei Wurzeln darstellbar; es ist z. B. λ^{123} dieselbe symmetrische Function von λ^{124}, λ^{125}, von λ^{134}, λ^{135} und von λ^{234}, λ^{235}. Führt man aber dies in das Theorem (9.) ein, so zeigt sich, dass jede Wurzel sich auch noch dreimal als eine andere symmetrische Function von zwei Wurzeln darstellt; so λ^{123} als Function von λ^{145}, λ^{245}, von λ^{145}, λ^{345} und von λ^{245}, λ^{345}. Und auf diese Weise hat man also noch das Theorem:

Theorem 10.

Jede Wurzel der Gleichung 10ten Grades, welche einem bestimmten Knotenpunkte entspricht, lässt sich dreimal als dieselbe symmetrische Function solcher zwei Wurzeln darstellen, deren entsprechende Punkte mit dem ersten auf einer Geraden liegen; und ferner dreimal als eine andere symmetrische Function zweier solcher Wurzeln, deren entsprechende Punkte auf der dem ersten angehörigen Geraden liegen.

§. 9.

Auflösung der Gleichung 10ten Grades mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades.

Aus dem Theorem 8. ergiebt sich die Reduction der Gleichung (20.) auf eine Gleichung fünften Grades und die völlige Auflösung der ersten mit Hülfe der letzten.

Es bedeute φ eine symmetrische Function mit 4 Argumenten, und sei sodann:

$$(22.)\quad \begin{cases} y_1 = \varphi(\lambda^{234}, \lambda^{235}, \lambda^{245}, \lambda^{345}), \\ y_2 = \varphi(\lambda^{134}, \lambda^{135}, \lambda^{145}, \lambda^{345}), \\ y_3 = \varphi(\lambda^{124}, \lambda^{125}, \lambda^{145}, \lambda^{245}), \\ y_4 = \varphi(\lambda^{123}, \lambda^{125}, \lambda^{135}, \lambda^{235}), \\ y_5 = \varphi(\lambda^{123}, \lambda^{124}, \lambda^{134}, \lambda^{234}), \end{cases}$$

so dass jedes y nur diejenigen λ enthält, in denen der Index des betreffenden y selbst nicht vorkommt.

Mit Hülfe des Theorems 8. kann man jedes y transformiren. Betrachten wir z. B. y_1. Dies kann man ansehen als symmetrische Function

1) von λ^{234}, λ^{235} und zugleich von λ^{245}, λ^{345},

2) von λ^{234}, λ^{245} und zugleich von λ^{235}, λ^{345},

3) von λ^{234}, λ^{345} und zugleich von λ^{245}, λ^{235}.

Aber nach dem achten Theorem ist jede symmetrische Function von λ^{234}, λ^{235}, λ^{231} durch λ^{451}, jede symmetrische Function von λ^{245}, λ^{345}, λ^{145} durch λ^{123} ausdrückbar; oder, was dasselbe ist, jede symmetrische Function von λ^{234}, λ^{235} unsymmetrisch durch λ^{451}, λ^{231}, und dieselbe symmetrische Function von λ^{245}, λ^{345} ebenso durch λ^{231}, λ^{451}. *Nach der Anschauungsweise* 1) *wird also* y_1 *eine symmetrische Function von* λ^{451}, λ^{231}. Ebenso nach 2) von λ^{351}, λ^{421}, nach 3) von λ^{251}, λ^{341}. Es ist also, wenn Ω eine rationale symmetrische Function bezeichnet:

$$y_1 = \Omega(\lambda^{451}, \lambda^{231}) = \Omega(\lambda^{351}, \lambda^{421}) = \Omega(\lambda^{251}, \lambda^{341}).$$

Daraus folgt

$$3y_1^n = \Omega^n(\lambda^{451}, \lambda^{231}) + \Omega^n(\lambda^{351}, \lambda^{421}) + \Omega^n(\lambda^{251}, \lambda^{341}).$$

Ganz ebenso kann man die anderen y behandeln und erhält:

$$\begin{aligned}
3y_2^n &= \Omega^n(\lambda^{132}, \lambda^{452}) + \Omega^n(\lambda^{142}, \lambda^{352}) + \Omega^n(\lambda^{152}, \lambda^{342}),\\
3y_3^n &= \Omega^n(\lambda^{123}, \lambda^{453}) + \Omega^n(\lambda^{143}, \lambda^{253}) + \Omega^n(\lambda^{153}, \lambda^{243}),\\
3y_4^n &= \Omega^n(\lambda^{124}, \lambda^{354}) + \Omega^n(\lambda^{134}, \lambda^{254}) + \Omega^n(\lambda^{154}, \lambda^{234}),\\
3y_5^n &= \Omega^n(\lambda^{125}, \lambda^{345}) + \Omega^n(\lambda^{135}, \lambda^{245}) + \Omega^n(\lambda^{145}, \lambda^{235}).
\end{aligned}$$

Addirt man die erhaltenen Gleichungen, so hat man:

$$\begin{aligned}
6(y_1^n + y_2^n + y_3^n + y_4^n + y_5^n) = {} & \Omega^n(\lambda^{123}, \lambda^{145}) + \Omega^n(\lambda^{123}, \lambda^{245}) + \Omega^n(\lambda^{123}, \lambda^{345})\\
& + \Omega^n(\lambda^{124}, \lambda^{135}) + \Omega^n(\lambda^{124}, \lambda^{235}) + \Omega^n(\lambda^{124}, \lambda^{435})\\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
& + \Omega^n(\lambda^{345}, \lambda^{312}) + \Omega^n(\lambda^{345}, \lambda^{412}) + \Omega^n(\lambda^{345}, \lambda^{512}).
\end{aligned}$$

Aber nach Theorem 8. wird auf der rechten Seite dieser Gleichung die erste Horizontalreihe eine Function von λ^{123} allein, da sie eine symmetrische Function von λ^{145}, λ^{245}, λ^{345} ist. Ebenso verwandelt die zweite Reihe sich in dieselbe Function von λ^{124} allein, u. s. w. Die ganze rechte Seite ist also auf rationale Weise durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrückbar und sonach bekannt.

Diese Betrachtungen zeigen, dass die Potenzsummen der y sich immer durch bekannte Grössen ausdrücken lassen, welches auch die Function φ sein

mag; und man kann daher immer eine Gleichung fünften Grades

$$(23.)\qquad f(y) = y^5 - Ay^4 + By^3 - Cy^2 + Dy - E$$

aufstellen, deren Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sind.

Ich werde nun zeigen, dass nach Auflösung dieser Gleichung sämmtliche Wurzeln λ der Gleichungen zehnten Grades als bekannt angesehen werden können.

Man kann nämlich sofort fünf Gleichungen bilden:

$$(24.)\qquad \begin{cases} \lambda^4 - \alpha_1\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 - \gamma_1\lambda + \delta_1 = 0, \\ \lambda^4 - \alpha_2\lambda^3 + \beta_2\lambda^2 - \gamma_2\lambda + \delta_2 = 0, \\ \lambda^4 - \alpha_3\lambda^3 + \beta_3\lambda^2 - \gamma_3\lambda + \delta_3 = 0, \\ \lambda^4 - \alpha_4\lambda^3 + \beta_4\lambda^2 - \gamma_4\lambda + \delta_4 = 0, \\ \lambda^4 - \alpha_5\lambda^3 + \beta_5\lambda^2 - \gamma_5\lambda + \delta = 0, \end{cases}$$

deren Wurzeln respective sind:

$$(25.)\qquad \begin{cases} \lambda^{234}, & \lambda^{235}, & \lambda^{245}, & \lambda^{345}, \\ \lambda^{134}, & \lambda^{135}, & \lambda^{145}, & \lambda^{345}, \\ \lambda^{124}, & \lambda^{125}, & \lambda^{145}, & \lambda^{245}, \\ \lambda^{123}, & \lambda^{125}, & \lambda^{135}, & \lambda^{235}, \\ \lambda^{123}, & \lambda^{124}, & \lambda^{134}, & \lambda^{234}. \end{cases}$$

Denn um z. B. die α zu berechnen, hat man nur folgendermassen zu verfahren (vgl. *Abel,* dieses Journal Bd. 4, p. 137). Man bildet die Summe

$$a_n = y_1^n\alpha_1 + y_2^n\alpha_2 + y_3^n\alpha_3 + y_4^n\alpha_4 + y_5^n\alpha_5 .$$

Jedes dieser fünf Glieder ist eine symmetrische Function derselben Art, wie im Vorigen φ; die Summe drückt sich daher ganz wie im Vorigen die Summe aller y^n durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung aus; und man hat also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 \quad + \alpha_2 \quad + \alpha_3 \quad + \alpha_4 \quad + \alpha_5, \\ a_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 &= \alpha_1 y_1^4 + \alpha_2 y_2^4 + \alpha_3 y_3^4 + \alpha_4 y_4^4 + \alpha_5 y_5^4, \end{aligned}$$

wo die linken Seiten sich immer durch bekannte Grössen auf rationale Weise ausdrücken lassen. Diese Gleichungen genügen, um die α durch die y und durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung zu bestimmen, ja selbst, wie

Abel a. a. O. zeigt, um α_1 durch y_1, α_2 durch y_2 u. s. w. auszudrücken. Auf gleiche Weise findet man die β, γ etc. aus ähnlichen Systemen, und man kann, wenn alle Wurzeln der Gleichung (23.) bekannt sind, sämmtliche Gleichungen (24.) bilden; eine derselben, wenn nur eine Wurzel von (23.) bekannt ist, zwei, wenn zwei Wurzeln bekannt sind, u. s. w. Man ist inzwischen um so mehr berechtigt, statt *einer* Wurzel *sämmtliche* Wurzeln von (23.) als bekannt anzunehmen, da nach Auffindung *einer* Wurzel die anderen durch algebraische Operationen erhalten werden.

Man bemerkt aber, dass je zwei der Gleichungen (24.) eine, und nur eine, gemeinsame Wurzel haben. Verbindet man also je zwei dieser Gleichungen und erniedrigt immer den Grad der einen mit Hülfe der anderen, bis man zu einer Gleichung ersten Grades gelangt, so erhält man sämmtliche Wurzeln der Gleichung zehnten Grades. Und man hat zugleich folgendes Theorem erwiesen:

Theorem 11.

Wenn man die Wurzeln einer Gleichung zehnten Grades durch die Bezeichnung

$$\lambda^{123},\ \lambda^{124},\ \lambda^{125},\ \lambda^{134},\ \lambda^{135},\ \lambda^{145},\ \lambda^{234},\ \lambda^{235},\ \lambda^{245},\ \lambda^{345}$$

darstellt, und dann jede symmetrische Function dreier Wurzeln, welche zwei Indices gemein haben, sich als rationale Function derjenigen Wurzel ausdrücken lässt, welcher die den ersten Wurzeln nicht gemeinsamen Indices derselben zukommen, so führt die Auflösung der gegebenen Gleichung nur auf eine einzige Gleichung des fünften Grades.

§. 10.

Sätze über das *Steiner*sche Pentaeder.

Sind x, x', x'' drei Knotenpunkte, welche auf der nämlichen Geraden liegen, so hat man nach (19.) folgende Gleichungen, deren jede ein System von zehn Gleichungen darstellt:

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \alpha_i\beta_k+\beta_i\alpha_k,\\ u'_{ik} &= \alpha'_i\beta'_k+\beta'_i\alpha'_k,\\ u''_{ik} &= \alpha''_i\beta''_k+\beta''_i\alpha''_k, \end{aligned}$$

wo die α, β die Coordinaten der drei Ebenenpaare sind, in welche die Polaren der Punkte x, x', x'' zerfallen. Da nun diese Punkte auf einer Geraden

liegen, so giebt es immer Factoren μ, μ', μ'', so dass für jeden Index i

$$\mu x_i + \mu' x'_i + \mu'' x''_i = 0.$$

Die u_{ik} sind lineare Functionen der x; es ist also auch immer dann

$$\mu u_{ik} + \mu' u'_{ik} + \mu'' u''_{ik} = 0.$$

oder

$$\mu(\alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k) + \mu'(\alpha'_i \beta'_k + \beta'_i \alpha'_k) + \mu''(\alpha''_i \beta''_k + \beta''_i \alpha''_k) = 0.$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichung mit den laufenden Coordinaten $X_i X_k$, und summirt nach i und k, so erhält man:

$$(26.) \quad \mu AB + \mu' A'B' + \mu'' A''B'' = 0,$$

wo

$$A = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0,$$
$$B = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

die Gleichungen der Ebenen sind, in welche die Polaren zerfallen.

Die Gleichung (26.) muss für alle Werthe der X bestehen; sie drückt also eine Eigenschaft aus, welche der gegenseitigen Lage der sechs Ebenen zukommt. In der That kann man immer in Folge der Gleichung (26.) drei lineare Ausdrücke E, E', E'' so bestimmen, dass

$$(27.) \quad \begin{cases} A\,B = \mu' E''^2 - \mu'' E'^2, \\ A'B' = \mu'' E^2 - \mu E''^2, \\ A''B'' = \mu E'^2 - \mu' E^2; \end{cases}$$

oder man kann setzen:

$$(28.) \quad \begin{cases} A = E''\sqrt{\mu'} + E'\sqrt{\mu''}, & B = E''\sqrt{\mu'} - E'\sqrt{\mu''}, \\ A' = E\sqrt{\mu''} + E''\sqrt{\mu}, & B' = E\sqrt{\mu''} - E''\sqrt{\mu}, \\ A'' = E'\sqrt{\mu} + E\sqrt{\mu'}, & B'' = E'\sqrt{\mu} - E\sqrt{\mu'}. \end{cases}$$

Um die Formeln (27.) einzusehen, darf man nur erwägen, dass die sechs Ausdrücke A, B, welche gleich Null gesetzt Ebenen ergeben, die sich in einem Punkte durchschneiden, sich deshalb nothwendig durch drei lineare Ausdrücke E darstellen lassen. Als solche kann man diejenigen wählen, welche, gleich Null gesetzt, Ebenen darstellen, die durch je zwei Doppellinien der drei Ebenenpaare hindurchgehen. Dann wird $A.B$ Function von E', E'' allein, $A'.B'$ von E'', E allein, $A''.B''$ von E, E'. Die Gleichung (26.), welche für die E identisch sein muss, lehrt dann, dass die Producte der E nicht vorkommen dürfen, und zeigt ferner sogleich, dass die absoluten Werthe der Coefficienten der E sich den Gleichungen (27.) gemäss bestimmen lassen.

Da die Ebenen E durch je zwei der 10 Geraden gehen, so sind sie nichts anderes als die Pentaederflächen, welche hinfort auch als Ebenen E bezeichnet werden mögen. Die Gleichungen (28.) aber beweisen das Theorem des Herrn *Steiner:*

Theorem 12.

Die Ebenenpaare, in welche die Polaren der 10 Knotenpunkte zerfallen, bilden immer mit den zwei durch ihre Schnittlinie gehenden Pentaederflächen harmonische Büschel.

Herr *Steiner* sagt in der mehrfach angeführten Abhandlung, dass zwischen diesen Ebenenpaaren noch fernere geometrische Beziehungen eintreten, ohne dieselben anzuführen. Ich werde im Folgenden solche Beziehungen angeben, welche sich leicht vermehren lassen, und welche vielleicht die von Herrn *Steiner* angedeuteten Verhältnisse berühren. Zuvor bemerke ich nur, dass sich die absoluten Werthe der Coefficienten der E, so wie der x, so bestimmen lassen, dass in den Gleichungen (28.) nur Summen und Differenzen der E erscheinen. Setzt man dann

$$(29.)\quad E^{(i)} = c_1^{(i)}x_1+c_2^{(i)}x_2+c_3^{(i)}x_3+c_4^{(i)}x_4,$$

so erhält man die Gleichungen (aus (19.))

$$(30.)\quad \begin{cases} u_{ik}^{123}.\sigma^{123} = c_i^{(4)}c_k^{(4)}-c_i^{(5)}c_k^{(5)}, \\ u_{ik}^{124}.\sigma^{124} = c_i^{(5)}c_k^{(5)}-c_i^{(3)}c_k^{(3)}, \\ u_{ik}^{125}.\sigma^{125} = c_i^{(3)}c_k^{(3)}-c_i^{(4)}c_k^{(4)}, \\ u_{ik}^{134}.\sigma^{134} = c_i^{(2)}c_k^{(2)}-c_i^{(5)}c_k^{(5)}, \\ u_{ik}^{135}.\sigma^{135} = c_i^{(4)}c_k^{(4)}-c_i^{(2)}c_k^{(2)}, \\ u_{ik}^{145}.\sigma^{145} = c_i^{(2)}c_k^{(2)}-c_i^{(3)}c_k^{(3)}, \\ u_{ik}^{234}.\sigma^{234} = c_i^{(5)}c_k^{(5)}-c_i^{(1)}c_k^{(1)}, \\ u_{ik}^{235}.\sigma^{235} = c_i^{(1)}c_k^{(1)}-c_i^{(4)}c_k^{(4)}, \\ u_{ik}^{245}.\sigma^{245} = c_i^{(3)}c_k^{(3)}-c_i^{(1)}c_k^{(1)}, \\ u_{ik}^{345}.\sigma^{345} = c_i^{(1)}c_k^{(1)}-c_i^{(2)}c_k^{(2)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, in denen die σ constante Factoren bedeuten, und wo

$$(31.)\quad x_i^{\alpha\beta\gamma} = -x_i^{\beta\alpha\gamma} \text{ etc.},$$

sind so gebildet, dass in dem Schema

$$u_{ik}^{\alpha\beta\gamma}.\sigma^{\alpha\beta\gamma} = c_i^{\delta}c_k^{\delta}-c_i^{\epsilon}c_k^{\epsilon}$$

immer α, β, γ, δ, ε eine positive Permutation der Reihe 1, 2, 3, 4, 5 bildet. Es ist sofort klar, dass einige der Gleichungen (30.) vermöge einer passenden Bestimmung der absoluten Werthe der c angenommen werden dürfen: etwa die erste, zweite, vierte und achte. Die anderen Gleichungen folgen dann sofort aus diesen, wenn nur die Bedingungen, dass 10 mal drei Punkte x auf einer Geraden liegen sollen, durch die Gleichungen dargestellt werden:

$$(32.)\qquad \sigma^{\alpha\beta\gamma}.x_i^{\alpha\beta\gamma}+\sigma^{\alpha\beta\delta}.x_i^{\alpha\beta\delta}+\sigma^{\alpha\beta\varepsilon}.x_i^{\alpha\beta\varepsilon} = 0.$$

Es ist nur die Frage, ob die Factoren σ diesen Gleichungen gemäss bestimmt werden können. Nun kann man immer die absoluten Werthe der x so bestimmt denken, dass die Gleichung

$$(33.)\qquad \Sigma_i z_i x_i^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ c_1^\alpha & c_2^\alpha & c_3^\alpha & c_4^\alpha \\ c_1^\beta & c_2^\beta & c_3^\beta & c_4^\beta \\ c_1^\gamma & c_2^\gamma & c_3^\gamma & c_4^\gamma \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Werthen der z erfüllt ist. Diese Annahme erfüllt zugleich die Bedingung (31.), dass durch Vertauschung zweier Indices die Coordinaten eines Punktes x ihr Zeichen ändern sollen. Die Gleichungen (32.) reduciren sich dann darauf, dass die Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} c_1^\alpha & c_1^\beta & c_1^\gamma\sigma^{\alpha\beta\gamma}+c_1^\delta\sigma^{\alpha\beta\delta}+c_1^\varepsilon\sigma^{\alpha\beta\varepsilon} & z_1 \\ c_2^\alpha & c_2^\beta & c_2^\gamma\sigma^{\alpha\beta\gamma}+c_2^\delta\sigma^{\alpha\beta\delta}+c_2^\varepsilon\sigma^{\alpha\beta\varepsilon} & z_2 \\ c_3^\alpha & c_3^\beta & c_3^\gamma\sigma^{\alpha\beta\gamma}+c_3^\delta\sigma^{\alpha\beta\delta}+c_3^\varepsilon\sigma^{\alpha\beta\varepsilon} & z_3 \\ c_4^\alpha & c_4^\beta & c_4^\gamma\sigma^{\alpha\beta\gamma}+c_4^\delta\sigma^{\alpha\beta\delta}+c_4^\varepsilon\sigma^{\alpha\beta\varepsilon} & z_4 \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Werthen der z erfüllt sein soll. Dies geschieht, indem man

$$(34.)\qquad \sigma^{\alpha\beta\gamma} = \tau^\alpha.\tau^\beta.\tau^\gamma$$

setzt, und die Verhältnisse der τ aus den Gleichungen bestimmt:

$$(35.)\qquad \begin{cases} \tau' c_1' + \tau^{(2)} c_1^{(2)} + \tau^{(3)} c_1^{(3)} + \tau^{(4)} c_1^{(4)} + \tau^{(5)} c_1^{(5)} = 0, \\ \tau' c_2' + \tau^{(2)} c_2^{(2)} + \tau^{(3)} c_2^{(3)} + \tau^{(4)} c_2^{(4)} + \tau^{(5)} c_2^{(5)} = 0, \\ \tau' c_3' + \tau^{(2)} c_3^{(2)} + \tau^{(3)} c_3^{(3)} + \tau^{(4)} c_3^{(4)} + \tau^{(5)} c_3^{(5)} = 0, \\ \tau' c_4' + \tau^{(2)} c_4^{(2)} + \tau^{(3)} c_4^{(3)} + \tau^{(4)} c_4^{(4)} + \tau^{(5)} c_4^{(5)} = 0; \end{cases}$$

wodurch denn sowohl die Zulässigkeit der Form (30.) erwiesen, als die Bestimmung der σ der Annahme (32.) gemäss geleistet ist.

Durch die vorliegenden Betrachtungen sind, wie man erkennt, die absoluten Werthe der x bis auf einen (in den τ enthaltenen) allen gemeinsamen Factor fixirt; und ebenso können die c nur noch die Quadratwurzel dieses Factors enthalten.

Die Polare von $x^{\alpha\beta\gamma}$ geht in der vorliegenden Form in

$$(\Gamma^{(\delta)})^2-(\Gamma^{(\varepsilon)})^2 = 0$$

über, oder die Ebenen, in welche sie zerfällt, sind

$$\Gamma^{(\delta)}+\Gamma^{(\varepsilon)}=0, \qquad \Gamma^{(\delta)}-\Gamma^{(\varepsilon)}=0.$$

Sie sollen die Ebenen F genannt werden. Bezeichnen wir dann noch respective als Ebenen G, H, J diejenigen, deren Gleichungen in den Formeln:

$$\Gamma^{(i)}\pm\Gamma^{(k)}\pm\Gamma^{(h)} = 0,$$
$$\Gamma^{(i)}\pm\Gamma^{(k)}\pm\Gamma^{(h)}\pm\Gamma^{(m)} = 0,$$
$$\Gamma^{(1)}\pm\Gamma^{(2)}\pm\Gamma^{(3)}\pm\Gamma^{(4)}\pm\Gamma^{(5)} = 0$$

enthalten sind, so sieht man sehr leicht die Sätze des folgenden Theorems ein, welche sich übrigens nach Belieben vermehren und fortsetzen lassen:

Theorem 13.

Solche sechs Ebenen F, in welche die Polaren dreier auf einer Geraden liegenden Knotenpunkte zerfallen, schneiden sich viermal zu drei in einer Geraden f. Dieser Geraden f giebt es 40; jede Ebene F enthält drei Paare derselben. Verbindet man zwei solcher durch eine Gerade f gehenden Ebenen F zu zugeordneten eines harmonischen Büschels, so geht die der dritten zugeordnete vierte harmonische immer durch eine von 60 Geraden g, in welcher die mit der dritten in einer Polare vereinigte Ebene F von der durch die Doppellinien derjenigen Polaren gelegten Pentaederfläche geschnitten wird, welche in den beiden einander zugeordneten Ebenen des harmonischen Büschels liegen.

Diese 60 Geraden g liegen zugleich auf den 40 Ebenen G, jede auf zweien derselben; immer vier der Ebenen G gehen durch jede Ecke des Pentaeders; und je zwei solcher vier, welche in einer Geraden g sich mit einer Ebene F und einer Ebene E durchschneiden, bilden mit denselben ein harmonisches Büschel.

Die Ebenen G werden ausserdem von den Ebenen E in 80 Geraden h geschnitten, durch welche ausserdem noch immer zwei der 40 Ebenen

H gehen; und vier so durch eine Gerade h gehende Ebenen bilden immer ein harmonisches Büschel.

Es schneiden sich 180mal zwei Ebenen G in einer Ebene F. Die vierte harmonische zu solchen drei Ebenen geht immer durch eine von 60 Geraden i, in welchen sich zwei Ebenen H mit zwei Ebenen F schneiden; und zwar gehen durch jede Gerade i vier Ebenen der gedachten Art, welche zugleich immer mit einer Ebene H und den beiden Ebenen F auf passende Weise verbunden ein harmonisches Büschel bilden; auch bilden die zwei Ebenen F immer mit den zwei Ebenen H selbst ein harmonisches Büschel. Die Geraden i, f bilden mit den Kanten des Pentaeders das vollständige System von Schnittlinien der Ebenen F.

Die Ebenen H werden von den Ebenen E noch (ausser h) in 40 anderen Geraden k geschnitten, welche zugleich 40 von den Durchschnittslinien der 16 Ebenen J sind; und zwar bilden solche durch eine Gerade k gehende vier Ebenen immer ein harmonisches Büschel. Diese Ebenen J durchschneiden sich ausserdem noch in 80 Geraden l, deren jede zugleich einer der Ebenen F und einer der Ebenen G angehört, welche dann mit den durch die Schnittlinie gehenden Ebenen J ein harmonisches Büschel bilden. Auf jeder Ebene F liegen vier, auf jeder Ebene G zwei dieser Geraden.

§. 11.

Darstellung einer homogenen Function dritter Ordnung mit vier Veränderlichen als Aggregat von fünf Cuben.

Von den Gleichungen (30.) aus gelangt man sehr leicht zu der Darstellung der Function u als Aggregat von fünf Cuben. Bestimmt man fünf Grössen w so, dass sie der Gleichung

$$(36.)\qquad \Sigma z^{(i)} w^{(i)} = \begin{vmatrix} z^{(1)} & c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} \\ z^{(2)} & c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & c_4^{(2)} \\ z^{(3)} & c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & c_4^{(3)} \\ z^{(4)} & c_1^{(4)} & c_2^{(4)} & c_3^{(4)} & c_4^{(4)} \\ z^{(5)} & c_1^{(5)} & c_2^{(5)} & c_3^{(5)} & c_4^{(5)} \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Werthen der z genügen, so kann man den Gleichungen (30.)

mit Rücksicht auf (34.), (35.) die Form geben:

$$(37.)\qquad m.\begin{vmatrix} u_{ik1} & u_{ik2} & u_{ik3} & u_{ik4} \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & c_4^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & c_4^{(3)} \end{vmatrix} = w^{(4)} w^{(5)} (c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)})$$

u. s. w.

wo m einen unbestimmten Factor bedeutet.

Sieht man in diesen Gleichungen, welche, obwohl sie an Zahl die der Grössen c bei weitem übertreffen, nach dem Vorigen neben einander bestehen können, die Grössen c als bekannt, die u als unbekannt an, um diese durch jene auszudrücken, so erkennt man sogleich, dass u_{ikh} sich immer als lineare Function der $c_i . c_k$ darstellen muss. Aber ebenso muss es eine lineare Function der $c_i . c_h$ und eine lineare Function der $c_k . c_h$ sein; bei der ersten Darstellung können die Coefficienten nur noch von dem Index h, bei der zweiten von dem Index k, bei der dritten von dem Index i abhängig sein. Dies ist nicht anders möglich, als wenn u_{ikh} die Form annimmt:

$$(38.)\qquad \mu_{ikh} = \Sigma_\alpha \varrho^{(\alpha)} c_i^{(\alpha)} c_k^{(\alpha)} c_h^{(\alpha)}.$$

Allerdings könnten noch Terme u'_{ikh} möglicher Weise hinzutreten, welche dann die Eigenschaft hätten, an Stelle der u_{ikh} in (37.) eingesetzt, die linke Seite verschwinden zu machen. Aber dann müsste jede der Ebenen

$$u'_{ik1} X_1 + u'_{ik2} X_2 + u'_{ik3} X_3 + u'_{ik4} X_4 = 0$$

durch jede der Pentaederecken gehen, was offenbar nicht möglich ist. Die Coefficienten u_{ikh} müssen also die Form (38.) annehmen, in welcher nur die Coefficienten ϱ zu bestimmen bleiben.

Führt man die Ausdrücke (38.) in die Gleichungen (37.) ein, so erhält man:

$$\varrho^{(4)} c_i^{(4)} c_k^{(4)} \begin{vmatrix} c_1^{(4)} & c_2^{(4)} & c_3^{(4)} & c_4^{(4)} \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & c_4^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & c_4^{(3)} \end{vmatrix} + \varrho^{(5)} c_i^{(5)} c_k^{(5)} \begin{vmatrix} c_1^{(5)} & c_2^{(5)} & c_3^{(5)} & c_4^{(5)} \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & c_4^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & c_4^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\tau^{(4)} \tau^{(5)}}{m} (c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)}),$$

u. s. w.

oder, mit Rücksicht auf (36.):

$$-\varrho^{(4)}.c_i^{(4)}c_k^{(4)}.w^{(5)}+\varrho^{(5)}.c_i^{(5)}c_k^{(5)}.w^{(4)} = \frac{w^{(4)}w^{(5)}}{m}(c_i^{(4)}c_k^{(4)}-c_i^{(5)}c_k^{(5)}).$$

Diese Gleichung muss für alle Werthe von i und k bestehen; es folgt also:

$$-\varrho^{(4)} = \frac{w^{(4)}}{m}, \quad -\varrho^{(5)} = \frac{w^{(5)}}{m}, \quad \text{u. s. w.}$$

und überhaupt:

$$\varrho^{(\alpha)} = -\frac{w^{(\alpha)}}{m}.$$

Aus der Gleichung (38.) erhält man somit, indem wirklich allen Gleichungen (37.) genügt ist:

$$u_{ikh} = -\frac{1}{m}.\Sigma_\alpha w^{(\alpha)} c_i^{(\alpha)} c_k^{(\alpha)} c_h^{(\alpha)}.$$

Wenn man nun mit x_i, x_k, x_h multiplicirt und nach i, k, h summirt, so kommt:

$$u = -\frac{1}{6m}\{w^{(1)}E^{(1)^3}+w^{(2)}E^{(2)^3}+w^{(3)}E^{(3)^3}+w^{(4)}E^{(4)^3}+w^{(5)}E^{(5)^3}\}.$$

Diese identische Gleichung enthält die Darstellung der Function u als Aggregat von fünf Cuben. Zwischen den Argumenten E besteht eine lineare Beziehung; denn indem man in (36.) $z^{(1)} = E^{(1)}$, $z^{(2)} = E^{(2)}$, ... setzt, verschwindet der rechte Theil jener Gleichung, und es bleibt:

$$0 = w^{(1)}E^{(1)}+w^{(2)}E^{(2)}+w^{(3)}E^{(3)}+w^{(4)}E^{(4)}+w^{(5)}E^{(5)},$$

was die fragliche Beziehung ist.

Durch die vorangehenden Betrachtungen ist also das folgende Theorem strenge erwiesen:

Theorem 14.

Eine homogene Function dritter Ordnung von vier Veränderlichen kann im Allgemeinen auf eindeutige Weise als Aggregat von fünf Cuben linearer Ausdrücke dargestellt werden, zwischen deren Argumenten dann eine lineare Beziehung besteht; und zwar erfordert dies nur die Auflösung einer einzigen Gleichung fünften Grades.

Auch ist in dem Vorigen der Weg angegeben, wie man zu dieser Transformation gelangt; womit allerdings die algebraische Seite des Problems nichts weniger als erschöpft ist. Indem man nämlich nach der oben auseinandergesetzten Methode die 10 Knotenpunkte aufsucht und die Gleichungen der fünf Pentaederseiten bildet, erhält man die Verhältnisse der Coefficienten in den verschiedenen Ausdrücken E, und dann die absoluten Werthe der Coefficienten aus irgend welchen der Gleichungen (37.).

§. 12.

Ueber einige besondere Arten die Hülfsgleichung fünften Grades zu bilden.

Ich setze $m = -\frac{1}{6}$, um die Werthe der c, w vollkommen zu bestimmen. Man hat also dann:

$$u = \Sigma w^{(i)} E^{(i)2},$$
$$0 = \Sigma w^{(i)} E^{(i)}.$$

Man kann dann in der in §. 9 auseinandergesetzten allgemeinen Methode die willkürlich gewählten Functionen immer so bestimmen, *dass die Wurzeln der Gleichung fünften Grades die sechsten Potenzen der Grössen w selbst werden.*

Es sollen zu diesem Ende die Grössen $x^{\alpha\beta\gamma}$ die Coordinaten der Knotenpunkte ohne irgend welche Voraussetzung über die absoluten Werthe bedeuten. Dann kann man diese Grössen mit Hülfe der Gleichung

$$(39.)\qquad \Sigma z_i x_i^{\alpha\beta\gamma} = p^{\alpha\beta\gamma}.\Sigma \pm z_1 c_2^\alpha c_3^\beta c_4^\gamma$$

definiren, wo die p unbestimmte Factoren bedeuten. Die Gleichungen (37.) nehmen unter diesen Umständen die Gestalt an:

$$u_{ik}^{123} = -6.p^{123}.w^{(4)} w^{(5)} (c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)}),$$

u. s. w.

Aus denselben kann man Combinationen nach Art der folgenden bilden:

$$u_{ik}^{123} + u_{ik}^{145} = -6p^{123} w^{(4)} w^{(5)} (c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)}) - 6p^{145} w^{(2)} w^{(3)} (c_i^{(2)} c_k^{(2)} - c_i^{(3)} c_k^{(3)}),$$
$$u_{ik}^{123} - u_{ik}^{145} = -6p^{123} w^{(4)} w^{(5)} (c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)}) + 6p^{145} w^{(2)} w^{(3)} (c_i^{(2)} c_k^{(2)} - c_i^{(3)} c_k^{(3)}).$$

Setzt man aus den 10 jeder dieser Gleichungen entsprechenden Ausdrücken die Determinanten zusammen, und bezeichnet überhaupt durch $\Delta(z)$ die *Hesse*sche Function für einen Punkt, dessen Coordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 sind, so ist hienach:

$$\Delta(x^{123} + x^{145}) = 36(p^{123} p^{145})^2.(w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(4)} w^{(5)})^2,$$
$$\Delta(x^{123} - x^{145}) = 36(p^{123} p^{145})^2.(w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(4)} w^{(5)})^2.$$

Es ist aber zu bemerken, dass

$$\Delta(x^{123}) = \Delta(x^{145}) = 0,$$

weil sämmtliche Knotenpunkte in der *Hesse*schen Fläche liegen; und auch

$$\Sigma_i x_i^{123} \frac{\partial \Delta(x^{145})}{\partial x_i^{145}} = 0,$$
$$\Sigma_i x_i^{145} \frac{\partial \Delta(x^{123})}{\partial x_i^{123}} = 0,$$

da die Differentialquotienten von Δ an den Knotenpunkten nothwendig ver-

schwinden. Setzt man also der Kürze wegen:

$$(40.)\quad \begin{cases} \vartheta(x,y) = \frac{1}{12}\Sigma_i\Sigma_k x_i x_k \dfrac{\partial^2 \Delta(y)}{\partial y_i \partial y_k} \\ \qquad\quad = \frac{1}{12}\Sigma_i\Sigma_k y_i y_k \dfrac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial x_i \partial x_k}, \end{cases}$$

so gehen die vorigen Gleichungen in die eine über:

$$(41.)\quad \vartheta(x^{123}, x^{145}) = (p^{123}.p^{145})^2.(\Pi w)^2,$$

wo noch Πw der Kürze wegen für das Product aller w gesetzt ist. Aber ganz ebenso ist auch:

$$\vartheta(x^{124}, x^{135}) = (p^{124}.p^{135})^2.(\Pi w)^2,$$
$$\vartheta(x^{125}, x^{134}) = (p^{125}.p^{134})^2.(\Pi w)^2.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, und setzt:

$$(42.)\quad \Theta^{(1)} = \vartheta(x^{123}, x^{145}).\vartheta(x^{124}, x^{135}).\vartheta(x^{125}, x^{134}),$$

so kommt also:

$$(43.)\quad \Theta^{(1)} = (\Pi w)^6.(p^{123}.p^{124}.p^{125}.p^{134}.p^{135}.p^{145})^2$$

nebst fünf entsprechenden Gleichungen.

Hingegen ergiebt sich aus den Gleichungen (39.) mit Hülfe eines bekannten Determinantensatzes:

$$(44.)\quad D^{(1)} = \{\Sigma \pm x_1^{234} x_2^{235} x_3^{245} x_4^{345}\}^2 = (p^{234}.p^{235}.p^{245}.p^{345})^2.(w^{(1)})^6.$$

Bildet man nun das Product sämmtlicher Gleichungen (43.), so wie sämmtlicher Gleichungen (44.), und bezeichnet immer durch Π das Product gleichartiger Grössen, so erhält man:

$$\Pi\Theta = (\Pi w)^6.(\Pi p)^6,$$
$$\Pi D = (\Pi w)^6.(\Pi p)^4,$$

und durch Auflösung:

$$(45.)\quad (\Pi p)^2 = \frac{\Pi\Theta}{\Pi D},\quad (\Pi w)^6 = \frac{(\Pi D)^3}{(\Pi\Theta)^2}.$$

Wenn man endlich die Gleichungen (43.), (44.) oder ähnliche Paare multiplicirt, so kommt:

$$\Theta^{(i)}.D^{(i)} = (w^{(i)})^6.(\Pi w)^6.(\Pi p)^2,$$

oder mit Hülfe der Gleichungen (45.)

$$(46.)\quad (w^{(i)})^6 = \frac{\Theta^{(i)}.D^{(i)}.\Pi\Theta}{(\Pi D)^2}.$$

Der Ausdruck rechts ist von den absoluten Werthen unabhängig, welche den verschiedenen Systemen der x beigelegt werden können. Er ändert daher seinen Werth nicht, wenn man statt der x die Functionen der entsprechenden λ setzt (21.), welchen jene proportional werden. Es gehe hierdurch $D^{(i)}$

in $d^{(i)}$, $\Theta^{(i)}$ in $\vartheta^{(i)}$ über, so dass

$$(47.)\qquad (w^{(i)})^6 = \frac{d^{(i)}.\vartheta^{(i)}.\Pi\vartheta}{(\Pi d)^2}.$$

Alsdann aber ist $d^{(1)}$ eine symmetrische Function von λ^{234}, λ^{235}, λ^{245}, λ^{345}; und $\vartheta^{(1)}$ das Product von drei Functionen, welche bezüglich dieselben symmetrischen Functionen der Wurzelpaare

$$\lambda^{123},\quad \lambda^{145};\quad \lambda^{124},\quad \lambda^{135};\quad \lambda^{125},\quad \lambda^{134}$$

sind. Ich werde zeigen, dass demnach auch $\vartheta^{(1)}$ sich als eine symmetrische Function von λ^{234}, λ^{245}, λ^{235}, λ^{345} darstellen lässt.

Hierzu genügt die Bemerkung, dass, wenn man in der Function $\varphi(x,y)$ für x, y die Coordinaten zweier auf einer der 10 Geraden liegenden Knotenpunkte setzt, diese Function nothwendig verschwindet. Dies kommt daher, dass diese Gerade ganz in der *Hesse*schen Fläche liegt, und dass also $\Delta(x\pm y)$ für solche Punkte vollständig verschwinden muss. Gehe nun φ in ψ über, indem man für die Coordinaten x, y die ihnen proportionalen Functionen der entsprechenden λ setzt; dann ist

$$\vartheta^{(1)} = \psi(\lambda^{123},\lambda^{145}).\psi(\lambda^{124},\lambda^{135}).\psi(\lambda^{125},\lambda^{134});$$

und ψ verschwindet immer, wenn man für seine Argumente zwei λ wählt, die zwei Indices gemein haben. Bildet man also ψ für je zwei der Grössen

$$\lambda^{123},\quad \lambda^{124},\quad \lambda^{125},\quad \lambda^{134},\quad \lambda^{135},\quad \lambda^{145},$$

und bildet das Product von je drei solchen Functionen, so ist die Summe aller Producte $\vartheta^{(1)}$, indem alle anderen Glieder verschwinden. So kann man also $\vartheta^{(1)}$ als symmetrische Function dieser sechs Wurzeln darstellen; mithin auch durch die Coefficienten der Gleichung zehnten Grades als symmetrische Function der vier übrigen Wurzeln, wie es verlangt wurde.

Es folgt also hieraus, dass sowohl d als ϑ Functionen der Art sind, wie sie in §. 9 als Wurzeln einer Gleichung fünften Grades benutzt wurden. Es folgt weiter, dass Πd und $\Pi\vartheta$ mit Hülfe der in jenem §. auseinandergesetzten Betrachtungen unmittelbar durch die Coefficienten der Gleichung zehnten Grades ausdrückbar sind. Demnach wird wirklich $(w^{(i)})^6$ eine symmetrische Function von denjenigen vier Wurzeln λ, in denen der Index i nicht vorkommt; und man hat das Theorem:

Theorem 15.

Wenn u eine Function dritter Ordnung mit vier Veränderlichen ist, und die Grössen E lineare Functionen bedeuten, so kann man immer der

Function u die Gestalt

$$u = \sum_{i=1}^{i=5} w^{(i)} E^{(i)^3}$$

geben, während identisch

$$0 = \sum_{i=1}^{i=5} w^{(i)} E^{(i)},$$

indem man eine Gleichung fünften Grades aufstellt, deren Wurzeln die sechsten Potenzen der w, und deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von u sind.

In ähnlicher Art kann man auf mannigfaltige Weise von algebraischen, der Function *u* verwandten Formen zu Gleichungen fünften Grades übergehen. Sei es erlaubt als *Covariante mit mehreren Systemen von Veränderlichen* eine solche Function der Coordinaten von mehreren Punkten und der Coefficienten von *u* zu bezeichnen, welche durch Anwendung linearer Transformationen in eine gleiche Function der neuen Coordinaten und Coefficienten übergeht, multiplicirt mit einer Potenz der Transformationsdeterminante; heisse dieselbe ausserdem symmetrisch, sobald sie durch Vertauschung der Coordinaten der verschiedenen Punkte ihren Werth nicht ändert. Dann sieht man sofort den Satz ein:

Theorem 16.

Bildet man den Quotienten zweier symmetrischen Covarianten gleich hoher Ordnung mit vier Systemen von Veränderlichen, und führt als solche Systeme die Coordinaten der fünf möglichen Combinationen solcher vier Knotenpunkte ein, welche sämmtlich einen bestimmten Index nicht enthalten, so können diese fünf Werthe immer als Wurzeln einer Gleichung fünften Grades angesehen werden, deren Coefficienten sich rational durch die Coefficienten von u ausdrücken, und durch welche die Bestimmung der 10 Knotenpunkte geleistet wird.

Eine Covariante dieser Art ist z. B. das Quadrat der aus den Coordinaten von vier Punkten gebildeten Determinante; eine andere entsteht aus der *Hesse*schen Function, indem man sie dreimal differentiirt und statt der Incremente jedesmal die Coordinaten eines anderen Punktes einführt. Der Quotient beider kann in derselben Weise wie oben geschehen ist, zur Bildung einer Gleichung fünften Grades benutzt werden. — Man kann aber zugleich bemerken, dass nach den bekannten Eigenschaften der Covarianten man den Werth eines

solchen Quotienten auch bilden kann, indem man unmittelbar die Form des Aggregats von fünf Cuben zu Grunde legt. Der gedachte Quotient enthält also dann ausser den vier Coordinatenreihen nur noch die fünf Grössen w. Die Coordinaten der 10 Knotenpunkte lassen sich, indem man vier der Pentaederflächen als Coordinatentetraeder zu Grunde legt, oder auch, indem man fünf Coordinaten einführt, wie ich dies in meiner Abhandlung im 58sten Bande dieses Journals gethan habe, ebenfalls durch die Grössen w allein ausdrücken. Und man erkennt dann leicht, dass die fünf Werthe jenes Quotienten oder die fünf Wurzeln der Gleichung fünften Grades Functionen der Grössen w sind, und zwar solche Functionen, deren jede in Bezug auf vier der Grössen w symmetrisch und nur in Rücksicht der fünften unsymmetrisch sind; welche endlich sich nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle dieser unsymmetrisch auftretenden Grössen w der Reihe nach sämmtliche fünf Grössen gesetzt werden.

Carlsruhe, den 14. Februar 1861.

Ueber die Reibung der Flüssigkeiten.

(Von Herrn *Oskar Emil Meyer* aus Varel a. d. Jahde.)

Theoretischer Theil *).

Der älteste Versuch einer Theorie der Reibung der Flüssigkeiten, der mir bekannt geworden ist, rührt von *Newton* **) her. *Newtons* Betrachtung stützt sich auf eine Hypothese, die in neuester Zeit mehrmals wieder unabhängig von *Newton* aufgestellt und als Fundament theoretischer Betrachtungen über die Reibung der Flüssigkeiten benutzt worden ist, die Hypothese nämlich, dass die Reibung zweier benachbarten Flüssigkeitsschichten dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional, dagegen vom Druck unabhängig und der Berührungsfläche proportional sei. Bei der mathematischen Durchführung dieses seines Grundgedankens verfällt *Newton* in einen Fehler, der bereits von *Johann Bernoulli* gerügt wurde, als derselbe in einer von der Akademie zu Paris 1730 gekrönten Abhandlung †) versuchte, die elliptische Bahn der Planeten und das Vorrücken der Nachtgleichen aus der Cartesianischen Hypothese der Wirbel zu erklären. Bei dieser geistreich durchgeführten Untersuchung lässt *Bernoulli* für die Reibung der von *Descartes* angenommenen Aetherwirbel gegen einander eine der *Newton*schen ähnliche Hypothese als Gesetz eintreten. *Bernoulli* nimmt nämlich Anstand, die Reibung, wie *Newton* gethan hatte, unabhängig vom Druck zu setzen, und das gewiss mit vollem Rechte, da er den Aether für compressibel hält. Er nimmt daher an, die Reibung der Aetherwirbel sei dem Drucke und zwar dem aus der Centrifugalkraft resultirenden Drucke proportional. Aehnlich verfährt *Euler* ††), aber minder glücklich. *Euler* setzt die Reibung unabhängig von der Geschwindigkeit und proportional dem hydrostatischen Drucke, ohne die Wirkung der kleinsten Theilchen auf einander zu berücksichtigen.

---

*) Meine experimentellen Untersuchungen über diesen Gegenstand erscheinen im 113ten Bande von *Poggendorffs* Annalen.

**) Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687. Lib. II. sect. IX.

†) Opera omnia. Lausannae et Genevae 1742. Tomus III. Nouvelles pensées sur le système de Mr. *Descartes*. XIX—XXIII.

††) Tentamen theoriae de frictione fluidorum. Novi commentarii Petropolitani, tomus VI. 1756 et 57. Pag. 338. Diese Abhandlung scheint sehr unbekannt zu sein. S. *Hagenbach* (*Pogg*. Ann. Bd. 109 S. 387) und seinen Gewährsmann *Prony*.

Einen ganz anderen Weg, der eine theoretische Begründung der *Newton*schen Hypothese enthält, schlug zuerst *Navier* *) ein. Derselbe entwickelte die Differentialgleichungen für die Bewegung eines tropfbar flüssigen Mediums, das der Reibung unterworfen ist, aus Betrachtungen, die denjenigen völlig analog sind, die er zur Ableitung der Differentialgleichungen der elastischen Erscheinungen benutzte. Auf dem betretenen Wege folgte *Poisson* **), der die Reibung der tropfbaren und elastischen Flüssigkeiten aus der Anziehung und Abstossung der kleinsten Theilchen auf ähnliche Weise, wie die Elasticität, erklärte. Eine Methode, die gleichsam zwischen der von den beiden letztgenannten Mathematikern befolgten und der von *Newton* angewandten die Mitte hält, benutzte *Stokes* †). Derselbe gelangte, obschon sich seine Principien wesentlich von den *Navier*schen und *Poisson*schen unterscheiden, für tropfbar flüssige Medien zu denselben Gleichungen wie jene beiden Mathematiker, und zwar denselben Gleichungen, die man auch mit Hülfe der *Newton*schen Hypothese entwickeln kann. Dagegen stellt sich für gasförmige und andere compressible Flüssigkeiten ein Unterschied zwischen den Resultaten von *Poisson* und *Stokes* heraus. Ob die *Newton*sche Hypothese auch für compressible Flüssigkeiten gültig ist, ob also die aus derselben entwickelten Gleichungen die Bewegungen dieser Flüssigkeiten auch dann noch darstellen, wenn Compressionen oder Dilatationen stattfinden, kann zweifelhaft erscheinen.

Im Folgenden habe ich die Entwicklung der Gleichungen aus der *Newton*schen Hypothese nach dem Vorgange meines Lehrers, Professor *Neumann*, ausgeführt, der unabhängig von *Newton* dieselbe Hypothese, wie dieser, aufgestellt hat.

Die Integration dieser Differentialgleichungen ist von *Stokes* in der oben erwähnten Abhandlung für mehrere physikalische Probleme ausgeführt worden. Zu diesen gehört die Aufgabe, die Geschwindigkeit der Strömung von Flüssigkeiten durch enge cylindrische Röhren zu bestimmen, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Strömung an jedem Punkte des Rohrs der Wand parallel gerichtet sei. Dasselbe Problem hat bereits vor *Stokes* *Navier* zu lösen versucht, aber mit unglücklichem Erfolge, da er sich durch Beobachtungen von *Girard* zu Irrthümern verleiten liess. Später hat *Wiedemann* ††)

---

*) Mémoires de l'Académie des sciences. 1823. Tome VI, pag. 389.
**) Journal de l'école polytechnique. 20ième cahier, tome 13, pag. 139. 1831.
†) Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol. 8, pag. 287. 1849.
††) *Poggendorffs* Annalen. Band. 99. 1856.

dasselbe Problem behandelt, indem er die bereits von *Newton* benutzte Hypothese unabhängig von diesem aufstellte. In einer Fortsetzung dieser Arbeit von *Hagenbach* *) ist die Rechnung weiter ausgeführt. Gleichzeitig mit dieser Abhandlung erschienen die Untersuchungen von *H. Jacobson* **), in denen *Neumanns* Berechnung dieser Aufgabe mitgetheilt wird. Endlich giebt *Helmholtz* ***) dieselbe Rechnung, bei der er sich, wie es scheint, auf *Stokes* stützt.

Helmholtz behandelt ferner ein anderes Problem, das sich mittelst jener *Navier*schen Differentialgleichungen lösen lässt. Er untersucht nämlich, welchen Einfluss die Reibung einer in einer Hohlkugel enthaltenen Flüssigkeit auf die Bewegung dieser Hohlkugel ausübt, wenn dieselbe um einen ihrer Durchmesser als Axe oscillirt, und berechnet hiernach aus den von *v. Piotrowski* angestellten Versuchen die Reibungsconstante verschiedener Flüssigkeiten. Zu diesem rein praktischen Zweck war es nicht nothwendig, diejenige mathematische Strenge anzustreben, welche sich erreichen lässt.

Ein Problem sehr verwandter Art bildet den Hauptgegenstand der nachfolgenden Untersuchungen, nämlich die Entwicklung einer Theorie von Versuchen, die zuerst von *Coulomb* †) unternommen, später von *Moritz* ††) wiederholt und endlich von mir in grösserer Ausdehnung angestellt wurden. Der Zweck dieser Versuche ist, die Reibung einer Flüssigkeit aus der Verringerung der Geschwindigkeit zu berechnen, welche in Folge der Reibung der Flüssigkeit eine Scheibe erfährt, die in der Flüssigkeit um ihren Mittelpunkt in ihrer eignen Ebene oscillirt, welche also in der Weise ihre Schwingungen ausführt, dass sie sich um ihr Centrum dreht, ohne eine absolute Ortsveränderung zu erfahren.

Ich unternahm diese Beobachtungen, als die philosophische Facultät der Königsberger Universität für das Jahr 1857 den Studirenden eine dahin gerichtete Preisfrage stellte. Die bereits Ende 1857 in ihren Hauptpunkten fertige Theorie, welche, verbunden mit einer Anzahl von Experimenten, der Facultät eingereicht, von derselben des Preises werth erachtet wurde, habe ich seitdem möglichst fortgeführt und die Experimente erweitert. Bei Ausführung der Rechnungen und Anstellung der Versuche unterstützte mich

---

*) *Poggendorffs* Annalen. Band 109. 1860.

**) Archiv für Anatomie und Physiologie von *Reichert* und *du Bois*. 1860 u. 61.

***) Sitzungsberichte der k. k. Akademie. 12. April, 1860. *Helmholtz* und *von Piotrowski*, Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

†) Mémoires de l'Institut national. III, pag. 246.

††) *Poggendorffs* Annalen. Band 70.

wesentlich mein verehrter Lehrer, Herr *Professor Neumann in Königsberg,* der mir sowohl mit nie ermüdender Güte stets seinen freundlichen Rath zu Theil werden liess, als auch die zu den Beobachtungen nöthigen Apparate in der liberalsten Weise mir zur Verfügung stellte, und dem ich für beides meinen tiefgefühlten Dank hier öffentlich ausspreche.

Von diesen Untersuchungen liegt hier der theoretische Theil vor. Das mathematische Interesse des behandelten Problems liegt, wie mir scheint, vorzugsweise in dem ihm eigenthümlichen Umstande begründet, dass die particularen Integrale der Differentialgleichungen zum Theil in reeller, zum Theil in complex-imaginärer Form erscheinen, und dass nichts desto weniger die Bestimmung der Integrationsconstanten nach gebräuchlichen Methoden gelingt, da zu diesem Zwecke nicht, wie gewöhnlich, nur eine, sondern mehrere Gleichungen gegeben sind.

Aufstellung der für die Reibung der Flüssigkeiten geltenden Differential- und Bedingungsgleichungen.

§. 1.

Ich werde im Folgenden aus der bereits in der Einleitung erwähnten *Newton*schen Hypothese die vollständigen Differentialgleichungen nebst den Grenzbedingungen entwickeln, von denen die Bewegung eines flüssigen Mediums abhängt, dessen Theile sich an einander reiben. Bei der Ableitung der Grenzbedingungen werde ich mich dabei auf den Fall beschränken, dass die Oberfläche der Flüssigkeit durch die Bewegung nicht geändert wird.

Nach der *Newton*schen Hypothese ist die Reibung zweier Flüssigkeitsschichten, die durch eine Ebene von einander geschieden, sich parallel dieser Ebene in derselben Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegen, gegen einander proportional dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten; d. h. bezeichnen v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Schichten, t die Zeit, so ist nach der Hypothese der Zuwachs von v während des Zeitelements dt proportional $v'-v$, der von v' proportional $v-v'$. Derselbe ist ferner proportional der Berührungsfläche der Schichten und unabhängig vom Druck.

Setze ich voraus, dass die betrachteten Schichten nicht verschiedenen sich berührenden Flüssigkeiten angehören, sondern im Innern einer und derselben Flüssigkeit liegen, durch deren Raum hindurch die Geschwindigkeit eine continuirliche Function des Orts bildet, so erhalte ich für den Unterschied

der Geschwindigkeiten benachbarter Schichten die unendlich kleinen Werthe

$$v'-v = dv,$$
$$v-v' = -dv.$$

Dies zeigt zunächst, dass für Schichten desselben Mediums die *Newton*sche Hypothese streng richtig ist. Denn da die ausgeübte Reibung jedenfalls eine Function des Unterschiedes der Geschwindigkeit ist, welche mit diesem Unterschiede selbst verschwindet, so kann man für unendlich kleine Werthe dieses Unterschiedes die Reibung diesem Unterschiede proportional setzen.

Man könnte aus diesem Umstande, dass der Unterschied der Geschwindigkeiten benachbarter Schichten desselben Mediums unendlich klein ist, folgern, dass diese Schichten nur eine unendlich kleine Reibung auf einander ausüben könnten. Dies widerspricht der Erfahrung. Man ist damit gezwungen anzunehmen, dass der unendlich kleine Unterschied der Geschwindigkeiten mit einer unendlich grossen Constanten zu multipliciren ist, um den mathematischen Ausdruck der Reibung zu erhalten; oder mit anderen Worten, dass die Reibung zweier Schichten desselben Mediums nicht dem Unterschiede, dem Differential der Geschwindigkeit, sondern dem Differentialquotienten dieser Function proportional sein muss.

Dies lehrt eine doppelte Art der Reibung der Flüssigkeiten kennen, zwei Arten, die man bequem als innere und äussere Reibung unterscheidet. Die *innere Reibung* einer Flüssigkeit findet zwischen verschiedenen Schichten derselben Flüssigkeit statt; sie ist dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Normale der Trennungsfläche proportional. Die *äussere Reibung* dagegen wird von einer Flüssigkeit auf eine andere sie berührende ausgeübt; sie ist proportional dem Unterschiede der Geschwindigkeiten beider. Ein vollständig analoges Verhältniss, das die beiden gewählten Namen rechtfertigt, ist aus der Theorie der strömenden Wärme bekannt.

§. 2.

Ich lege durch das betrachtete flüssige Medium ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z. Parallel den Axen dieses Coordinatensystems lege ich die unendlich kleinen Kanten dx, dy, dz eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen dem Coordinatenanfangspunkte zugewendete Ecke in dem Punkte liegt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Es mögen u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit parallel den Coordinatenaxen im Punkte (x, y, z) bezeichnen.

Ich suche die auf die Flächen des kleinen Prismas ausgeübten Reibungskräfte. Bezeichnen η_1', η_2', η_3', η_1'', η_2'', η_3'', η_1''', η_2''', η_3''' Constanten, so sind der Hypothese gemäss die Componenten der gesuchten Kräfte an den dem Coordinaten-Anfangspunkte

$$
(1.)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
 & \textbf{zugewandten} & \textbf{abgewandten Flächen} \\
\text{parallel der } x\text{-Axe:} & -\eta_1' \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz & \eta_1' \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx \right\} dy\,dz \\
 & -\eta_2' \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dz\,dx & \eta_2' \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy \right\} dz\,dx \\
 & -\eta_3' \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy & \eta_3' \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz \right\} dx\,dy \\
\text{parallel der } y\text{-Axe:} & -\eta_1'' \dfrac{\partial v}{\partial x}\,dy\,dz & \eta_1'' \left\{ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx \right\} dy\,dz \\
 & -\eta_2'' \dfrac{\partial v}{\partial y}\,dz\,dx & \eta_2'' \left\{ \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dy \right\} dz\,dx \\
 & -\eta_3'' \dfrac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dy & \eta_3'' \left\{ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,dz \right\} dx\,dy \\
\text{parallel der } z\text{-Axe:} & -\eta_1''' \dfrac{\partial w}{\partial x}\,dy\,dz & \eta_1''' \left\{ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx \right\} dy\,dz \\
 & -\eta_2''' \dfrac{\partial w}{\partial y}\,dz\,dx & \eta_2''' \left\{ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy \right\} dz\,dx \\
 & -\eta_3''' \dfrac{\partial w}{\partial z}\,dx\,dy & \eta_3''' \left\{ \dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dz \right\} dx\,dy.
\end{array}
\right.
$$

Aus der Symmetrie des flüssigen Mediums folgt durch Vertauschung der Coordinaten

$$\eta_1' = \eta_2'' = \eta_3''' = \eta_1$$

$$\eta_2' = \eta_3' = \eta_1'' = \eta_3'' = \eta_1''' = \eta_2''' = \eta_2.$$

Es werden demnach die Summen der Componenten der auf das Prisma ausgeübten Reibungskräfte parallel den Axen

$$
(2.)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{der } x: & \left\{ \eta_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} dx\,dy\,dz \\
\text{-} \quad y: & \left\{ \eta_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_1 \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} dx\,dy\,dz \\
\text{-} \quad z: & \left\{ \eta_2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta_1 \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} dx\,dy\,dz.
\end{array}
\right.
$$

Ausser diesen Reibungskräften wirken auf die Flächen des Prismas Druckkräfte und zwar, wenn p den Druck an der Stelle (x, y, z) bezeichnet,

längs der Axen

$$\begin{array}{lll} \text{der } x: & p\,dy\,dz & -\left\{p+\frac{\partial p}{dx}dx\right\}dy\,dz \\ - \;\; y: & p\,dz\,dx & -\left\{p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right\}dz\,dx \\ - \;\; z: & p\,dx\,dy & -\left\{p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right\}dx\,dy. \end{array}$$

Endlich können auf das Prisma noch Kräfte wirken, deren Ursache ausserhalb des flüssigen Mediums liegt, wie z. B. die Schwerkraft. Ich bezeichne die Componenten derselben parallel den Axen

$$\begin{array}{ll} \text{der } x: & X\,dx\,dy\,dz \\ - \;\; y: & Y\,dx\,dy\,dz \\ - \;\; z: & Z\,dx\,dy\,dz. \end{array}$$

Die Summen dieser Componenten halten den beschleunigenden Kräften multiplicirt mit der Masse des Prismas das Gleichgewicht. Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so erhält man also nach Division durch das Volumen $dx\,dy\,dz$ die Differentialgleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \varrho\frac{du}{dt} = \eta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\eta_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\eta_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial p}{\partial x}+X, \\ \varrho\frac{dv}{dt} = \eta_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\eta_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\eta_2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial p}{\partial y}+Y, \\ \varrho\frac{dw}{dt} = \eta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\eta_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{\partial p}{\partial z}+Z. \end{cases}$$

Es ist leicht durch Transformation des gewählten Coordinatensystems auf ein beliebiges anderes rechtwinkliges nachzuweisen, dass

$$\eta_1 = \eta_2$$

sein muss. Da über die Lage des früheren Coordinatensystems nichts vorausgesetzt ist, so gelten die Gleichungen (3.) ebenso für ein beliebiges anderes System rechtwinkliger Coordinaten x_1, y_1, z_1. Die Componenten der Geschwindigkeit parallel den Axen dieses neuen Systems seien u_1, v_1, w_1, die der Kräfte X_1, Y_1, Z_1. Dann ist ebenso

$$(4.)\quad \begin{cases} \varrho\frac{du_1}{dt} = \eta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\eta_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}+\eta_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}-\frac{\partial p}{\partial x_1}+X_1, \\ \varrho\frac{dv_1}{dt} = \eta_2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\eta_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2}+\eta_2\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2}-\frac{\partial p}{\partial y_1}+Y_1, \\ \varrho\frac{dw_1}{dt} = \eta_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\eta_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\eta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}-\frac{\partial p}{\partial z_1}+Z_1. \end{cases}$$

Es seien die Coordinaten x_1, y_1, z_1 mit x, y, z durch die Relationen verbunden

$$(5.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z, \\ y_1 = \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z, \\ z_1 = \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z. \end{cases}$$

Dann ist auch

$$(6.)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w, & X_1 = \alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z, \\ v_1 = \alpha_2 u+\beta_2 v+\gamma_2 w, & Y_1 = \alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_2 Z, \\ w_1 = \alpha_3 u+\beta_3 v+\gamma_3 w, & Z_1 = \alpha_3 X+\beta_3 Y+\gamma_3 Z. \end{cases}$$

Zwisch en den neun eingeführten Constanten bestehen die Relationen

$$(7.)\quad \begin{cases} 1 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2, & 1 = \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2, \\ 1 = \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2, & 1 = \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2, \\ 1 = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2, & 1 = \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2, \\ 0 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1, & 0 = \alpha_1\beta_1+\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1, \\ 0 = \beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1, & 0 = \alpha_2\beta_2+\beta_2\gamma_2+\gamma_2\alpha_2, \\ 0 = \gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1, & 0 = \alpha_3\beta_3+\beta_3\gamma_3+\gamma_3\alpha_3. \end{cases}$$

Multiplicire ich die erste Gleichung (3.) mit α_1, die zweite mit β_1, die dritte mit γ_1 und addire darauf alle drei, so finde ich

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{du_1}{dt} = \eta_2\left\{\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right\} \\ \qquad +(\eta_1-\eta_2)\left\{\alpha_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta_1\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\gamma_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\}-\dfrac{\partial p}{\partial x_1}-X_1. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}$$

wegen der Gleichungen (7.). Es muss also, damit die Gleichung (8.) mit der ersten Gleichung (4.) identisch werde,

$$(\eta_1-\eta_2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = (\eta_1-\eta_2)\left\{\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\gamma_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\}$$

sein, oder

$$(\eta_1-\eta_2)\left\{\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\beta_1\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\gamma_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right\} = (\eta_1-\eta_2)\left\{\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\gamma_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\}.$$

Fallen die beiden Coordinatensysteme nicht zusammen, so ist diese Gleichung nur möglich, wenn

$$(9.)\quad \eta_1 = \eta_2$$

ist.

Bezeichne ich

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta,$$

so erhalte ich also statt der Gleichungen (3.)

$$(10.)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{du}{dt} = \eta \left\{ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} - \dfrac{\partial p}{\partial x} + X, \\ \varrho \dfrac{dv}{dt} = \eta \left\{ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} - \dfrac{\partial p}{\partial y} + Y, \\ \varrho \dfrac{dw}{dt} = \eta \left\{ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} - \dfrac{\partial p}{\partial z} + Z. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist ausser der Dichtigkeit ϱ noch eine zweite von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante enthalten, die Grösse η, die man zweckmässig die *Constante der inneren Reibung* oder kurz die *Reibungsconstante* oder den *Reibungscoefficienten* der Flüssigkeit nennt.

Zur Bestimmung der vier unbekannten Functionen u, v, w und p ist ausser den drei Gleichungen (10.) noch eine vierte nöthig. Diese ist für incompressible Flüssigkeiten

$$(11.)\quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Damit ist das Problem bis auf die an der Oberfläche stattfindenden Bedingungen bestimmt.

Bevor ich zu diesen übergehe, bemerke ich, dass ich in der gebräuchlichen Weise die partiellen Differentialquotienten durch das Zeichen ∂ von den totalen, für die ich d gebraucht habe, unterschieden habe. Es ist also

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} + w \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} + w \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u \dfrac{\partial w}{\partial x} + v \dfrac{\partial w}{\partial y} + w \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

§. 3.

Die Oberflächenbedingungen lassen sich durch Betrachtungen ableiten, die den oben durchgeführten so völlig analog sind, dass ich sie nur anzudeuten brauche. Wenigstens bleibt dies richtig für den Fall, dass die Oberfläche sich durch die Bewegung nicht ändert, den ich allein betrachte.

Diese Einschränkung liefert sofort die zwei Bedingungen, dass an der Oberfläche keine Geschwindigkeit in der Richtung der Normale derselben stattfinde, und dass der Druck an der Oberfläche gleich dem von aussen auf dieselbe ausgeübten sei, den ich mit P bezeichne. Es soll also an jedem Punkte der Oberfläche sein

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z), \\ p = P, \end{cases}$$

wo ich unter (n,x), (n,y), (n,z) die Neigungen der Normale der Oberfläche gegen die Richtungen der Coordinaten verstehe.

Zwei weitere Bedingungen erhalte ich für die Geschwindigkeit parallel der Oberfläche. Diese leite ich unter der Voraussetzung ab, dass das betrachtete flüssige Medium von einem anderen festen oder flüssigen begrenzt werde. Es seien s_1 und s_2 zwei auf einander rechtwinklige Richtungen in der Oberfläche, σ_1 und σ_2 die Componenten der Geschwindigkeit nach diesen Richtungen, σ_1' und σ_2' dieselben Grössen im benachbarten Medium, ferner S_1 und S_2 die nach diesen Richtungen genommenen Componenten der Kräfte, deren Componenten nach den Richtungen der x, y, z ich oben durch X, Y, Z bezeichnet habe, endlich E eine Constante. Ich construire unter der Oberfläche ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten ds_1, ds_2 und das Element dn der Normale sind. Ich bilde wie oben die Differentialgleichungen für die Bewegung dieses kleinen Raumes und finde

$$\begin{aligned} \varrho\, ds_1 ds_2 dn \frac{d\sigma_1}{dt} &= -\eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial n} ds_1 ds_2 + \eta \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial s_2^2} \right\} ds_1 ds_2 dn \\ &\quad + E(\sigma_1' - \sigma_1) ds_1 ds_2 - \frac{\partial p}{\partial s_1} ds_1 ds_2 dn - S_1 ds_1 ds_2 dn, \\ \varrho\, ds_1 ds_2 dn \frac{d\sigma_2}{dt} &= -\eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial n} ds_1 ds_2 + \eta \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial s_2^2} \right\} ds_1 ds_2 dn \\ &\quad + E(\sigma_2' - \sigma_2) ds_1 ds_2 - \frac{\partial p}{\partial s_2} ds_1 ds_2 dn - S_2 ds_1 ds_2 dn. \end{aligned}$$

Dabei ist die Richtung der Normale von der betrachteten Flüssigkeit in die

sie begrenzende hinein positiv angenommen. Da in diesen Gleichungen, welche Grössen verschiedener Ordnung enthalten, die Glieder gleicher Ordnung verschwinden müssen, so folgt, dass die Bedingungen

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = \eta\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial n}+E(\sigma_1-\sigma_1'), \\ 0 = \eta\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial n}+E(\sigma_2-\sigma_2') \end{cases}$$

stattfinden. Die Grössen von niederer Ordnung liefern indess keine neuen Gleichungen, da sie schon vermöge der Differentialgleichungen (10.) §. 2 verschwinden.

Die in diesen Gleichungen enthaltene Constante E nennt man, im Gegensatze zu der bereits definirten η, bequem die *Constante der äusseren oder gegenseitigen Reibung* zweier Flüssigkeiten.

Von den Gleichungen (2.) macht man leicht Anwendung auf den Fall einer freien Oberfläche. Ist die Oberfläche frei, so verschwindet E; es wird also

$$(3.)\quad 0=\frac{\partial\sigma_1}{\partial n},\quad 0=\frac{\partial\sigma_2}{\partial n}.$$

Ausserdem verdient der andere Grenzfall Erwähnung, in dem

$$E = \infty$$

ist. Dieser tritt ein, wenn die Flüssigkeit von einem Körper begrenzt wird, den sie benetzt. Sie haftet dann so fest an demselben, dass sie an der Oberfläche seine Geschwindigkeit hat. Es wird

$$(4.)\quad \sigma_1=\sigma_1',\quad \sigma_2=\sigma_2'.$$

Integration der Differentialgleichungen für die *Coulomb*schen Versuche.

§. 4.

Die im vorstehenden abgeleiteten Differentialgleichungen habe ich angewandt, eine Theorie von Versuchen zu entwickeln, die zuerst von *Coulomb* unternommen und von ihm im dritten Bande der mémoires de l'Institut national (S. 246) beschrieben wurden. Der angewandte Apparat bestand im Wesentlichen aus einer dünnen kreisrunden Scheibe, die an einem in ihrer Mitte befestigten Drathe horizontal aufgehängt war. Sie konnte durch Tordirung dieses Drathes in Oscillationen versetzt werden, die sie in ihrer eignen Ebene um den Drath als Axe ausführte. Diese Scheibe wurde in die Flüssigkeit eingetaucht, deren Reibung oder, wie *Coulomb* sich ausdrückte, deren Cohäsion

bestimmt werden sollte. *Coulomb* beobachtete, dass die Schwingungen der Scheibe in Folge der Reibung der Flüssigkeit sehr rasch abnehmen; und zwar bildeten die auf einander folgenden Amplituden eine geometrische Reihe, deren logarithmisches Decrement der vierten Potenz des Radius der Scheibe proportional war.

Später wurden diese Versuche von *Moritz* *) wiederholt. Leider aber sind diese neuen Beobachtungen weder zur Berechnung von Reibungsconstanten noch zur Prüfung der Theorie durch die Erfahrung geeignet, da die Bestimmung des Trägheitsmoments des angewandten Apparates unterlassen wurde.

Im Besitze der hier entwickelten Theorie der Versuche, erschien es mir daher wünschenswerth, die *Coulomb*schen Experimente noch einmal zu wiederholen. Bei der Anstellung meiner Beobachtungen, die ich in *Poggendorffs* Annalen gleichzeitig veröffentliche, richtete ich mein Augenmerk namentlich darauf, die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung noch strenger nachzuweisen, als sie sich bereits aus *Coulombs* Versuchen ergiebt. Ich lieferte so den Beweis von der Richtigkeit der Prämissen der Theorie, also der Hypothese, *dass die Reibung zweier Flüssigkeitsschichten dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional sei.* Ich führte diesen Beweis nicht allein für eine tropfbare Flüssigkeit, für *Wasser,* für welches er bereits durch die Beobachtung der Geschwindigkeit der Strömung durch cylindrische Röhren geführt worden ist; sondern auch für einen elastisch-flüssigen Körper, für *atmosphärische Luft,* jedoch mit der Einschränkung, dass in Folge der Bewegung weder Verdünnungen noch Verdichtungen eintreten. Durch meine Beobachtungen der Reibung der Luft ist also der Widerstreit der von *Stokes* und *Poisson* aufgestellten Gleichungen nicht entschieden.

Ich werde mir erlauben, von diesen meinen Beobachtungen hier diejenigen kurz mitzutheilen, die namentlich geeignet sind, die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung hervortreten zu lassen.

Zu dem Zwecke der beabsichtigten Integration ist es vortheilhaft, die Differentialgleichungen (10.) §. 2 zu transformiren. Ich bezeichne mit x die senkrechte Höhe eines Flüssigkeitstheilchens über dem mittleren horizontalen Querschnitt der Scheibe; mit r seine Entfernung von der verticalen Drehungsaxe der Scheibe; und mit φ den Winkel, den die durch das Theilchen und die Drehungsaxe gelegte Ebene mit irgend einer festen, ebenfalls durch die

*) *Pogg.* Ann. Bd. 70.

Drehungsaxe gelegten Ebene bildet. Ich setze also statt der in den Gleichungen (10.) §. 2 enthaltenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z

$$x = x, \qquad y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi.$$

Ich bezeichne ferner mit u die Geschwindigkeit des Theilchens, dem die Coordinaten x, r, φ angehören, in der Richtung von x; mit V die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung von r; und nenne ψ die Winkelgeschwindigkeit der Oscillation um die Drehungsaxe der Scheibe. Ich setze demnach

$$u = u, \qquad v = V\cos\varphi - r\psi\sin\varphi, \qquad w = V\sin\varphi + r\psi\cos\varphi.$$

Durch Einführung dieser Grössen erhalte ich die neuen Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{du}{dt} = \eta\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{r\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}-\dfrac{\partial p}{\partial x}+X, \\ \varrho\left\{\dfrac{dV}{dt}-r\psi^2\right\} = \eta\left\{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial(rV)}{r\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}-\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right\}-\dfrac{\partial p}{\partial r}+\mathrm{R}, \\ \varrho\left\{\dfrac{d\psi}{dt}+2\dfrac{V}{r}\psi\right\} = \eta\left\{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{r\partial r}\left(\dfrac{\partial(r^2\psi)}{r\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\dfrac{2}{r^3}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right\}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial p}{\partial\varphi}+\dfrac{F}{r}, \end{cases}$$

in denen X, R, F die nach den Richtungen der neuen Coordinaten genommenen Componenten der Kräfte X, Y, Z bezeichnen.

Die Bedingung der Continuität, Gleichung (11.) §. 2, wird durch die gemachten Substitutionen

$$(2.)\qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(rV)}{r\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.$$

Die Grenzbedingungen entwickle ich unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit sich in einem überall verschlossenen cylindrischen Gefässe befinde. Die Axe dieses cylindrischen Gefässes soll mit der Drehungsaxe der Scheibe zusammenfallen.

Ich bezeichne mit R den Radius der Scheibe, mit R' den des Gefässes, mit c_1 die halbe Dicke der Scheibe, mit c_2 die Höhe des oberen Bodens über der Mitte der Scheibe, mit c_3 die Tiefe des unteren unter derselben, also mit c_2+c_3 die ganze Höhe des Gefässes. Ich nenne ferner ψ_1 die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Scheibe sich um ihre Axe bewegt; und verstehe unter E die Constante der Reibung der Flüssigkeit an der Scheibe, unter E' die der Reibung an der Wand des Gefässes. Dann sind folgende Bedingungen zu erfüllen. Es ist

$$
(3.)\begin{cases}
\text{für } r=R & 0=\eta\frac{\partial u}{\partial r}-Eu; & 0=V & ; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial r}-E(\psi-\psi_1)\\
\text{-}\quad r=R' & 0=\eta\frac{\partial u}{\partial r}+E'u; & 0=V & ; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial r}+E'\psi\\
\text{-}\quad x=+c_1 & 0=u & ; & 0=\eta\frac{\partial V}{\partial x}-EV; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}-E(\psi-\psi_1)\\
\text{-}\quad x=-c_1 & 0=u & ; & 0=\eta\frac{\partial V}{\partial x}+EV; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}+E(\psi-\psi_1)\\
\text{-}\quad x=c_2 & 0=u & ; & 0=\eta\frac{\partial V}{\partial x}+E'V; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}+E'\psi\\
\text{-}\quad x=-c_3 & 0=u & ; & 0=\eta\frac{\partial V}{\partial x}-E'V; & 0=\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}-E'\psi.
\end{cases}
$$

Zu diesen Gleichungen kommt noch die Differentialgleichung für die Bewegung der Scheibe um ihre Axe. Auf diese wirkt ausser der Torsion des Drathes die Reibung der Flüssigkeit an ihren drei Flächen. Ist τ das Torsionsmoment des Drathes, φ_1 die Entfernung der Scheibe aus ihrer Gleichgewichtslage, so ist das durch die Elasticität des Drathes auf die Scheibe ausgeübte Drehungsmoment

$$-\tau\varphi_1;$$

das Moment der Reibungskräfte ist an der

oberen Basis $E\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3(\psi-\psi_1)\,d\varphi\,dr$, worin $x=c_1$,

unteren Basis $E\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3(\psi-\psi_1)\,d\varphi\,dr$, - $x=-c_1$,

Cylinderfläche $ER^3\int_0^{2\pi}\int_{-c_1}^{+c_1}(\psi-\psi_1)\,d\varphi\,dx$, - $r=R$ zu setzen ist.

Bezeichnet M das Trägheitsmoment des Apparats, so ist also die Differentialgleichung für die Bewegung desselben

$$
(4.)\quad \begin{cases}
\mathrm{M}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1+E\int_0^{2\pi}\Big\{R^3\int_{-c_1}^{+c_1}(\psi-\psi_1)_{r=R}\,dx\\
\qquad +\int_0^R(\psi-\psi_1)_{x=c_1}r^3\,dr+\int_0^R(\psi-\psi_1)_{x=-c_1}r^3\,dr\Big\}\,d\varphi.
\end{cases}
$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hülfe der Grenzbedingungen (3.) auf die be-

quemere Form

$$(5.)\quad \begin{cases} M\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1+\eta\int_0^{2\pi}\Big\{R^3\int_{-c_1}^{+c_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R}dx \\ \qquad +\int_0^R\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=c_1}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=-c_1}\right]r^3\,dr\Big\}\,d\varphi \end{cases}$$

bringen. Endlich besteht zwischen φ_1 und ψ_1 noch die Relation

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \psi_1.$$

Ich habe diese Gleichungen vollständig entwickelt, um an dieselbe eine nicht unwichtige Bemerkung zu knüpfen. Ist nämlich, wie es bei dem in Rede stehenden Versuche der Fall ist, alle Bewegung von φ unabhängig, und sind die Geschwindigkeiten so klein, dass ihre Quadrate gegen ihre ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so hören die Differentialgleichungen auf simultan zu sein. Es kommen ferner in einer und derselben Grenzbedingung keine Geschwindigkeitscomponenten verschiedener Richtung vor. Allein die Continuitätsgleichung (2.) enthält u und V. Die Winkelgeschwindigkeit ψ aber wird so von u und V vollständig unabhängig. Es wird also die Oscillation der Scheibe nicht durch solche Strudel im Innern der Flüssigkeit alterirt, bei denen die Bewegung in den durch die Drehungsaxe gelegten Ebenen und zwar in allen auf dieselbe Weise stattfindet, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten so klein sind, dass ihre Quadrate vernachlässigt werden dürfen.

Andererseits folgt hieraus, dass u und V bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der Geschwindigkeiten von ψ und φ_1 unabhängig sind. War also die Bewegung zu irgend einer Zeit, z. B. zur Zeit $t=0$, die den Anfang des Versuchs bezeichne, so beschaffen, dass an jeder Stelle der Flüssigkeit

$$u=0 \quad \text{und} \quad V=0$$

war, während nur ψ, ψ_1 und φ_1 endliche Werthe hatten: so bleiben u und V, vorausgesetzt, dass ψ so klein ist, dass sein Quadrat vernachlässigt werden darf, durch alle Zeit hindurch $=0$; ist ψ nicht so klein, dass diese Vernachlässigung erlaubt ist, so sind u und V Grössen von der Ordnung von ψ^2. Ist also der Versuch so eingerichtet, dass die Winkelgeschwindigkeit ψ eine so kleine Grösse ist, dass ihr Quadrat vernachlässigt werden darf — was dadurch geschehen kann, dass man eine Scheibe von hinreichend grossem Trägheitsmoment M anwendet —, so darf man zugleich u und V vernachlässigen.

Indem ich diese Voraussetzung, dass ψ^2, mithin auch u und V vernachlässigt werden dürfen und dass demnach

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} + V\frac{\partial\psi}{\partial r} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

zu setzen sei, einführe, erhalte ich die einfacheren Differentialgleichungen *):

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \eta\left\{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{r\partial r}\left(\dfrac{\partial . r^2\psi}{r\partial r}\right)\right\} \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\varrho g, \end{cases}$$

in denen g die beschleunigende Kraft der Schwere bedeutet, die früher allgemein durch X bezeichnet war. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen den Druck p im Innern der Flüssigkeit; da indess ψ von p unabhängig ist, so ist die Kenntniss von p ohne Interesse; ich werde deshalb nur die erste Gleichung weiter berücksichtigen.

Die Bedingung der Continuität, Gleichung (2.), wird in dieser Annäherung identisch erfüllt.

Von den Grenzbedingungen, Gleichungen (3.), bleiben nur die sechs für ψ gültigen.

Die Differentialgleichung für die Oscillation der Scheibe wird einfacher

$$(7.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1 + 2\pi\eta\left\{R^3\displaystyle\int_{-c_1}^{+c_1}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{R=r}dx \right. \\ \qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_0^R\left[\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=c_1} - \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=-c_1}\right]r^3 dr\right\}. \end{cases}$$

§. 5.

Diese Gleichungen werde ich indess nicht allgemein integriren, da diese Rechnung zu so complicirten Endformeln führen würde, dass dieselben zu

---

*) Zu diesen Gleichungen kann man auch direct durch Betrachtungen gelangen, die denen des §. 2 vollkommen analog sind. Ich habe es vorgezogen, dieselben durch Transformation abzuleiten, weil man die Hypothese unter einer scheinbar anderen Form einführen müsste. Es ist nämlich z. B. die Reibung an der der Axe zugewandten Seite eines Volumenelements $r\,dr\,d\varphi\,dx$ nicht

$$-\eta\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}r\,d\varphi\,dx,$$

sondern

$$-\eta r\frac{\partial\psi}{\partial r}r\,d\varphi\,dx.$$

praktischen Zwecken nicht mehr verwerthet werden könnten. Zur Erklärung der *Coulomb*schen Versuche ist es auch gar nicht nothwendig, die Winkelgeschwindigkeit eines jeden Flüssigkeitstheilchens zu kennen; sondern da die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe der Endzweck der Untersuchung ist, so genügt es, zunächst die Bewegung derjenigen Flüssigkeitsschichten zu bestimmen, welche den directesten und bedeutendsten Einfluss auf die Oscillationen der Scheibe ausüben, und aus dieser die Bewegung der Scheibe angenähert zu berechnen. Der hierhei begangene Fehler lässt sich durch vortheilhafte Anordnung des Versuchs beliebig klein machen.

Die Oberflächen, welche die Punkte verbinden, an denen zu irgend einem Zeitmomente gleiche Winkelgeschwindigkeit stattfindet, haben eine ähnliche Gestalt, wie ein sehr stark abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Axe mit der Drehungsaxe des Apparats, dessen Aequatorialebene mit der Mittelebene der Scheibe zusammenfällt. Je grösser der Radius der Scheibe und je geringer ihre Dicke ist, um so abgeplatteter müssen diese Flächen sein, d. h. um so grösser der Theil einer jeden, der als eben anzusehen ist. Auf diesem ebenen Theile jeder Oberfläche ist die Winkelgeschwindigkeit von der Coordinate r unabhängig. Für alle diese Stellen der Flüssigkeit berechne ich die Winkelgeschwindigkeit und verzichte darauf, sie für solche Stellen zu bestimmen, welche auf den gekrümmten Theilen jener Oberflächen liegen. Indem ich aus der Bewegung jenes ersten Theiles allein die Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe ableite, begehe ich den Fehler, anzunehmen, dass die ebenen Theile der Oberflächen eine der Fläche der Scheibe gleiche Ausdehnung besitzen. Diese Annahme ist nur streng richtig, wenn der Radius der Scheibe unendlich gross ist; sie ist aber mit grosser Annäherung richtig, wenn der Radius der Scheibe eine bedeutende Grösse im Verhältniss zu ihrer Dicke besitzt. Sie kommt der Wahrheit um so näher, je geringer die Dicke der Scheibe und je grösser ihr Radius ist. Das Resultat der Rechnung, der gefundene Werth der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, ist ferner um so strenger richtig, je geringer der Werth der Reibungsconstante ist. Denn da bei dieser Annäherung ein Theil der durch die Reibung zerstörten Geschwindigkeit der Flüssigkeit noch als vorhanden angesehen, mithin ein Theil der stattfindenden inneren Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt wird, so wird die Annäherung an die Wirklichkeit um so grösser, je kleiner die Reibungsconstante der Flüssigkeit ist. Berechne ich also aus wirklich angestellten Beobachtungen nach der so erhaltenen angenäherten Formel für die Bewegung der

Scheibe die Reibungsconstante der angewandten Flüssigkeit, so erhalte ich einen etwas zu grossen Werth dieser Constanten. Der Fehler dieses berechneten Werthes ist um so kleiner, je grösser der Radius und je geringer die Dicke der angewandten Scheibe ist und endlich je kleiner die Reibungsconstante selber ist. Da nun in der Natur diese Constante bei fast allen Flüssigkeiten in der That sehr klein ist, so ist zu erwarten, dass, wenn die Dimensionen der Scheibe passend gewählt sind, die Berechnung der nach der *Coulomb*schen Methode angestellten Beobachtungen mit Hülfe dieser angenäherten Theorie Resultate von grosser Genauigkeit liefern wird.

In der nachfolgenden Rechnung nehme ich ferner zunächst die Scheibe als unendlich dünn an; den hierdurch begangenen Fehler werde ich indess am Schlusse durch eine Correction so weit ausgleichen, als es die Genauigkeit der Beobachtung erfordert.

Durch Einführung dieser Annäherungen reduciren sich die Gleichungen auf die folgenden:

$$(1.)\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

$$(2.)\quad M\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\eta R^4\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=c_1} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=-c_1}\right\}.$$

Die erste dieser Gleichungen gilt streng für alle diejenigen Stellen der Flüssigkeit, deren Entfernung von der Drehungsaxe einen gewissen von x abhängigen Grenzwerth nicht übersteigt; die zweite Gleichung gilt nur angenähert. In derselben bedeutet c_1 eine unendlich kleine Grösse.

Zu diesen Gleichungen treten für die Grenzen der Flüssigkeit noch die Bedingungen hinzu, dass

$$(3.)\quad \begin{cases} \text{für } x = c_1 & 0 = \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} - E(\psi - \psi_1), \\ \text{- } x = -c_1 & 0 = \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + E(\psi - \psi_1), \\ \text{- } x = c_2 & 0 = \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + E'\psi, \\ \text{- } x = -c_3 & 0 = \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} - E'\psi \end{cases}$$

sein soll.

Eine symmetrischere Form nehmen diese Gleichungen an, wenn ich sowohl in dem oberen wie in dem unteren Theile der Flüssigkeit die Coordinate x immer positiv von der Scheibe in die Flüssigkeit hinein rechne, also

durch x nicht mehr die *Höhe über* oder *Tiefe unter* der Scheibe bezeichne, sondern die senkrechte *Entfernung* von derselben. Ich habe dann zugleich die Winkelgeschwindigkeiten der oberen und unteren Flüssigkeit, die in keinem directen Zusammenhange stehen, durch verschiedene Zeichen, ψ_2 und ψ_3, zu unterscheiden. Dadurch entstehen aus den Gleichungen (1.) bis (3.) die folgenden:

$$(4.)\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2},$$

$$(5.)\quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{\tau}{\mathrm{M}}\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\frac{\eta R^4}{\mathrm{M}}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)_{x=0},$$

$$(6.)\quad \left.\begin{cases} 0 = \eta\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} - E(\psi_2-\psi_1) \\ 0 = \eta\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - E(\psi_3-\psi_1) \end{cases}\right\} x = 0,$$

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = \eta\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} + E'\psi_2 & x = c_2, \\ 0 = \eta\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} + E'\psi_3 & x = c_3 \end{cases}$$

oder, wenn an den Wänden der Scheibe und des Gefässes keine Gleitung stattfindet,

$$(8.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 & x = 0 \\ 0 = \psi_2 & x = c_2 \\ 0 = \psi_3 & x = c_3. \end{cases}$$

Um zu vermeiden, dass durch die eingeführte Annäherung das mathematische Interesse an der Aufgabe geschmälert werde, mache ich darauf aufmerksam, dass die Gleichungen folgendem Experimente streng entsprechen. In einem hohlen Cylinder von der Höhe $2c_1+c_2+c_3$ und dem Radius R befindet sich in der Höhe c_2 oder c_3 über dem Boden eine Scheibe von gleichem Radius und der beliebigen Dicke $2c_1$, welche durch die Torsion eines Drathes in Schwingungen versetzt werden kann. Der übrige Raum des hohlen Cylinders ist mit Flüssigkeit erfüllt, welche die ebenen Wände des hohlen wie des vollen Cylinders benetzt. Dagegen findet an der gekrümmten Oberfläche des hohlen Cylinders keine Reibung statt, weder von der Flüssigkeit noch von dem vollen Cylinder.

§. 6.

Ich integrire die im vorigen §. enthaltenen Gleichungen unter der zuletzt eingeführten Voraussetzung, dass die Flüssigkeit die Scheibe und die Gefässwand so benetzt, dass an denselben keine Gleitung stattfindet.

Vorher aber führe ich einige andere Bezeichnungen ein, durch welche die Rechnung bedeutend vereinfacht wird. Zunächst führe ich statt der Coordinate x eine neue Variabele y ein, und zwar setze ich

$$(1.)\qquad x = y\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}.$$

Es bezeichnet also $y\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$ die von der Scheibe aus in die Flüssigkeit hinein positiv gerechnete Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von der nächsten Oberfläche der Scheibe. Dem entsprechend setze ich

$$(2.)\qquad c_2 = c\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}},\qquad c_3 = c'\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}},$$

so dass $c\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$ und $c'\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$ die Höhen der Flüssigkeit über und unter der Scheibe bezeichnen. Ferner setze ich zur Abkürzung

$$(3.)\qquad \frac{\tau}{\mathrm{M}} = \alpha^4;\qquad \frac{\pi R^4\sqrt{\eta\varrho}}{4\mathrm{M}} = \beta.$$

So werden die Differentialgleichungen (4.) und (5.) §. 5

$$(4.)\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2},$$

$$(5.)\qquad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\alpha^4\varphi_1 + 2\beta\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)_{y=0},$$

ferner erhalten die Grenzbedingungen (8.) §. 5 die Form, dass

$$(6.)\qquad \begin{cases} \text{für } y = 0 & \psi_1 = \psi_2 = \psi_3, \\ \;\;-\;\; y = c & 0 = \psi_2, \\ \;\;-\;\; y = c' & 0 = \psi_3 \end{cases}$$

wird. Zu diesen Gleichungen tritt endlich noch die Bedingung, dass die Functionen φ_1, ψ_1, ψ_2, ψ_3 zu einer Zeit $t = 0$, die den Moment des Anfangs des Versuchs bezeichne, gegebene Werthe annehmen, dass also

$$(7.)\qquad \text{für } t = 0\quad \varphi_1 = \Phi;\quad \psi_1 = \Psi_1;\quad \psi_2 = \Psi_2(y);\quad \psi_3 = \Psi_3(y)\quad \text{sei.}$$

Um ein particulares Integral der Differentialgleichungen zu erhalten, setze ich ψ_2 und ψ_3 gleich Producten einer Function von y allein in eine

Function von t allein. So finde ich

$$\psi_2 = \{A_2 \sin m_2 y + B_2 \cos m_2 y\} e^{-m_2^2 t},$$
$$\psi_3 = \{A_3 \sin m_3 y + B_3 \cos m_3 y\} e^{-m_3^2 t},$$

wenn unter den A, B, m Constante verstanden werden.

Mit diesen particularen Lösungen kann ich die erste Gleichung (6.) auf doppelte Weise erfüllen. Ich kann einmal ψ_1 durch ψ_2 und ψ_3 bestimmen; zweitens kann ich auch noch den Gleichungen (6.) genügen, wenn ich $\psi_1 = 0$ setze. Ich finde auf diese Weise sowohl die Bewegung, welche der Flüssigkeit und der Scheibe gemeinsam zukommt, als auch diejenige, welche die Flüssigkeit besitzt, ohne sie an die Scheibe zu übertragen. So erhalte ich

$$(8.) \quad \begin{cases} \psi_1 = C_m e^{-m^2 t}, \\ \psi_2 = C_m \dfrac{\sin m(c-y)}{\sin mc} e^{-m^2 t} + \Sigma_n B_n \sin ny \,.\, e^{-n^2 t}, \\ \psi_3 = C_m \dfrac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'} e^{-m^2 t} + \Sigma_{n'} B'_{n'} \sin n'y \,.\, e^{-n'^2 t}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke genügen zugleich den letzten Gleichungen (6.), wenn n und n' die Gleichungen

$$(9.) \quad 0 = \sin nc, \qquad 0 = \sin n'c'$$

erfüllen, wenn also n gleich einem ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{c}$, n' gleich einem solchen von $\frac{\pi}{c'}$ ist; die Zeichen Σ bedeuten Summen nach allen diesen Vielfachen, B_n, $B'_{n'}$ und C_m sind unbestimmte Constante.

Aus der ersten Gleichung (8.) erhalte ich durch Integration nach der Zeit

$$\varphi_1 = -\frac{C_m}{m^2} e^{-m^2 t}.$$

Ich füge keine Constante hinzu, indem ich mir vorbehalte C_m so zu bestimmen, dass dies nicht nöthig ist.

Der Differentialgleichung (5.) genügen die ersten Glieder der Ausdrücke (8.), wenn die Constante m so bestimmt wird, dass

$$(10.) \quad 0 = m^4 + \alpha^4 - 2\beta m^3 (\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc')$$

ist. Für die übrigen Glieder liefert dieselbe Gleichung für je ein Paar von n und n' die Bedingungen

$$(11.) \quad n = n', \qquad 0 = B_n + B'_{n'},$$

da sie für jeden Werth von t gilt.

Die Gleichung (10.), als transcendente Gleichung, liefert ein unendliches System von Wurzeln m. Ich erhalte also in den drei Functionen ein unendliches System von particularen Lösungen der ersten Form. Diese treten immer auf, welche Werthe auch c und c' besitzen mögen. Anders verhält es sich mit den Lösungen der zweiten Form: Die Gleichungen (11.) und (9.) sind nur zu erfüllen, wenn c und c' in dem Verhältnisse ganzer Zahlen stehen. Nach den Gleichungen (2.) können demnach nur dann Integrale der zweiten Form auftreten, wenn c_2 und c_3 commensurable Längen sind.

Dies erscheint auf den ersten Anblick äusserst befremdend. Es sieht aus, als sei die Anzahl der particularen Integrale in dem speciellen Falle der commensurablen Höhen grösser, als in dem allgemeineren der incommensurablen. Es verdient daher die Gleichung (10.) schon hier eine nähere Untersuchung.

Es lässt sich leicht auf geometrischem Wege beweisen, dass die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (10.) zusammen mit den gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen (9.)

$$0 = \sin nc, \qquad 0 = \sin n'c'$$

von den Werthen von c und c' unabhängig ist; d. h. dass die Anzahl der particularen Integrale, so weit sie von reellen Constanten abhängen, in allen Fällen dieselbe ist. Hinsichtlich der imaginären Wurzeln kann ein ähnliches Bedenken nicht entstehen, da nur die Gleichung (10.), nicht aber die Gleichungen (9.), imaginäre Wurzeln besitzt.

Genügt der Gleichung (10.) eine Wurzel m, so genügt ihr auch $-m$; ebenso ist es bei den Gleichungen (9.). Führt man gleiche mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftete Wurzeln m oder n in die Ausdrücke für ψ ein, so erhält man durch beide Wurzeln dieselben particularen Integrale. Ich brauche also nur die positiven Wurzeln zu berücksichtigen.

Zum Beweise der obigen Behauptung bringe ich die Gleichung (10.) auf die Form

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc') = \frac{m^4 + \alpha^4}{4\beta m^3}.$$

Ich construire zwei Curven, deren rechtwinklige Coordinaten m und

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc'), \qquad z_2 = \frac{m}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{4\beta m^3}$$

sind, für jeden positiven Werth der Abscisse m. Die Abscissen der Durchschnittspunkte beider Curven sind die Wurzeln der Gleichung (10.). Die Curve z_2 hat nur positive Ordinaten. Für $m = 0$ ist die Ordinate $z_2 = \infty$, ebenso für $m = \infty$; dazwischen hat z_2 endliche Werthe und ein Minimum, wo $m^4 = 3\alpha^4$

ist. Die Curve z_1 besteht aus Zweigen, deren Ordinaten steil von $+\infty$ bis $-\infty$ absinken und dann wieder in $+\infty$ übergehen. Durchschnitte beider Curven werden also bei Werthen der Abscisse stattfinden, welche etwas grösser sind, als diejenigen Abscissen, bei denen $z_1 = \infty$ wird. Es werden daher so viel Durchschnittspunkte auftreten, wie für positive Argumente

$$\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc' = \infty$$

wird. Stehen c und c' in incommensurablem Verhältnisse, so geschieht dies doppelt so oft, als eine Cotangente für sich ∞ wird. Stehen beide Grössen in commensurablem Verhältnisse, so fallen jedesmal dann zwei solcher Punkte, an denen die Summe beider Cotangenten ∞ werden sollte, zusammen, wenn m gleichzeitig gleich einem ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{c}$ und von $\frac{\pi}{c'}$ wird. Es fallen also durch diese Specialwerthe der Parameter c und c' auch die zwei letzten kurz nach diesem Werthe der Abscisse eintretenden Durchschnittspunkte der Curven zusammen. Dafür erscheint aber dieser Werth der Abscisse selber als gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (9.). Es tritt also jedesmal dann und zwar nur dann eine Wurzel der Gleichungen (9.) auf, wenn durch besondere Werthe der Grössen c und c' eine der Wurzeln der Gleichung (10.) mit einer anderen zusammenfällt. Damit ist die obige Behauptung, dass die Summe der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (10.) und der der gemeinsamen Wurzeln der Gleichung (9.) von den Werthen der Parameter c und c' unabhängig sei, bewiesen.

Die Zahl der imaginären Wurzeln der Gleichung (10.) habe ich allgemein nicht untersucht, da diese Untersuchung mit Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint, welche zu dem Nutzen derselben in keinem Verhältnisse stehen. Ich habe weiter unten für den Fall einer unbegrenzten Flüssigkeit jene Wurzeln entwickelt. Hier will ich nur zeigen, dass der Gleichung (10.) keine rein imaginären Wurzeln genügen, und dass sie nur dann complex-imaginäre besitzt, wenn α, also τ, von 0 verschieden ist. Dies letztere heisst, physikalisch gesprochen, dass die Scheibe nicht durch die Reibung der Flüssigkeit, sondern nur durch die Torsionskraft des Aufhängungsdrathes in periodische Schwingungen versetzt werden kann.

Dass kein rein imaginäres m der Gleichung (10.) genügen kann, ergiebt sich sofort, wenn man in derselben $m = bi$ setzt, wo b eine reelle Grösse und $i = \sqrt{-1}$ ist. Man erhält dann die Gleichung

$$0 = b^4 + \alpha^4 + 2\beta b \left\{ \frac{e^{bc} + e^{-bc}}{e^{bc} - e^{-bc}} + \frac{e^{bc'} + e^{-bc'}}{e^{bc'} - e^{-bc'}} \right\},$$

der weder ein positives noch ein negatives b genügen kann, da alle übrigen in ihr enthaltenen Zeichen positive Grössen bedeuten. Der Gleichung (10.) genügt also kein m von der Form $m = bi$.

Dass m, wenn $\alpha = 0$ ist, auch nicht die Form $a+bi$ besitzen kann, in der a und b reell sind, folgt aus dem Werthe des Integrals

$$(12.) \qquad (m^2-m_1^2)\int_0^c \frac{\cos m(c-y)}{\sin mc}\cdot\frac{\cos m_1(c-y)}{\sin m_1 c}\,dy = m\operatorname{ctg} m_1 c - m_1 \operatorname{ctg} mc.$$

Sind m und m_1 Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung (10.), so ist

$$(13.) \quad \begin{cases} (m^2-m_1^2)\left\{\int_0^c \frac{\cos m(c-y)}{\sin mc}\cdot\frac{\cos m_1(c-y)}{\sin m_1 c}\,dy + \int_0^{c'} \frac{\cos m(c'-y)}{\sin mc'}\cdot\frac{\cos m_1(c'-y)}{\sin m_1 c'}\,dy\right\} \\ = m(\operatorname{ctg} m_1 c + \operatorname{ctg} m_1 c') - m_1(\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc') = \frac{m^4-m_1^4}{m^3 m_1^3}\,\frac{\alpha^4}{2\beta}. \end{cases}$$

Besitzt nun die Gleichung (10.) eine Wurzel von der Form $a+bi$, so besitzt sie auch die Wurzel $a-bi$ und, da sowohl $+m$ als auch $-m$ ihr genügen, die Wurzeln $-a+bi$ und $-a-bi$. Ich bin also berechtigt a und b als positive reelle Grössen zu definiren.

Setze ich in der letzten Gleichung $m = a+bi$, $m_1 = a-bi$, so nimmt dieselbe die Form

$$ab\left\{\int_0^c \frac{P^2+Q^2}{p^2+q^2}\,dy + \int_0^{c'} \frac{P_1^2+Q_1^2}{p_1^2+q_1^2}\,dy\right\} = ab\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^3}\,\frac{\alpha^4}{\beta}$$

an, in welcher P, P_1, Q, Q_1, p, p_1, q, q_1 reelle Grössen bezeichnen. Ist nun $\alpha = 0$, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung. Die linke Seite verschwindet nur, wenn a oder $b = 0$ wird; da aber $a = 0$ dem obigen Beweise widerspricht, nach dem m nicht die Form bi haben kann, so folgt, dass

$$\text{für } \alpha = 0 \qquad b = 0,$$

also m reell sein muss.

Andererseits enthält die letzte Gleichung für $\alpha > 0$ den Beweis, dass

$$a^2 - b^2 > 0$$

oder, da a und b positiv sein sollen, dass

$$(14.) \qquad a - b > 0$$

ist. Diese Bemerkung wird in der Folge von Wichtigkeit sein, da sie zeigt, dass die Bewegung der Scheibe und der Flüssigkeit mit wachsender Zeit abnimmt, nicht mit ihr ins Unendliche wächst.

Eine zweite physikalisch interessante Eigenschaft von a und b folgt aus dem Integralsatze

$$(15.)\quad (m^2-m_1^2)\int_0^c \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc}\cdot\frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c}\,dy \;=\; m_1 \operatorname{ctg} m_1 c - m \operatorname{ctg} mc.$$

Sind m und m_1 Wurzeln der Gleichung (10.), so folgt hieraus

$$(16.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^c \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc}\cdot\frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c}\,dy + \int_0^{c'} \frac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'}\cdot\frac{\sin m_1(c'-y)}{\sin m_1 c'}\,dy \\ \displaystyle = \frac{m_1(\operatorname{ctg} m_1 c+\operatorname{ctg} m_1 c')-m(\operatorname{ctg} mc+\operatorname{ctg} mc')}{m^2-m_1^2} = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\alpha^4}{m^2 m_1^2}-1\right\}, \end{cases}$$

und wird hierin $m=a+bi$ und $m_1=a-bi$ gesetzt, so erhält die Gleichung die Form

$$\int_0^c \frac{M^2+N^2}{p^2+q^2}\,dy + \int_0^{c'} \frac{M_1^2+N_1^2}{p_1^2+q_1^2}\,dy \;=\; \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\alpha^4}{(a^2+b^2)^2}-1\right\},$$

in der M, M_1, N, N_1 reelle Grössen sind, und p, p_1, q, q_1 die frühere Bedeutung haben. Die linke Seite der Gleichung ist also positiv. Daraus folgt

$$(17.)\quad (a^2+b^2) < \alpha^2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{M}}}$$

und, da a und b reelle Grössen sind, folglich

$$a^2+b^2 > 2ab$$

ist, so ergiebt sich, dass auch

$$2ab < \alpha^2,$$

oder dass

$$(18.)\quad \frac{\pi}{2ab} > \frac{\pi}{\alpha^2} = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\tau}}$$

ist. Dies heisst, wie sich weiter unten zeigen wird, physikalisch ausgedrückt: die Schwingungsdauer der Scheibe ist in der reibenden Flüssigkeit grösser als im luftleeren Raume.

Durch Einführung der sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (10.) und Benutzung der Relationen (11.) werden die vollständigen Integrale der Gleichungen

$$(19.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \Sigma_m C_m e^{-m^2 t}, \qquad \varphi_1 = -\Sigma_m \frac{C_m}{m^2}\cdot e^{-m^2 t}, \\ \psi_2 = \Sigma_m C_m \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc}\cdot e^{-m^2 t} + \Sigma_n B_n \sin ny \,.\, e^{-n^2 t}, \\ \psi_3 = \Sigma_m C_m \frac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'}\cdot e^{-m^2 t} - \Sigma_n B_n \sin ny \,.\, e^{-n^2 t}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet m eine Wurzel der Gleichung (10.), n eine solche der Gleichungen (9.), C_m eine von m und B_n eine von n abhängende Constante; Σ_m deutet die Summation nach allen Werthen von m, Σ_n dieselbe nach allen Werthen von n an.

In diesen Gleichungen sind nur noch die Werthe der Constanten C_m und B_n unbestimmt. Dieselben bestimmen sich durch die Gleichungen (7.), die einzigen, die noch zu erfüllen sind. Durch Einsetzen der Werthe (19.) in diese Gleichungen erhält man

$$(20.)\quad \begin{cases} \Psi_1 \;\; = \Sigma_m C_m, \qquad -\Phi = \Sigma_m \dfrac{C_m}{m^2}, \\ \Psi_2(y) = \Sigma_m C_m \dfrac{\sin m(c-y)}{\sin mc} + \Sigma_n B_n \sin ny, \\ \Psi_3(y) = \Sigma_m C_m \dfrac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'} - \Sigma_n B_n \sin ny. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man sehr einfach den Werth eines bestimmten B_n, wenn man dieselben mit dem zugehörigen $\sin ny . dy$ multiplicirt, nach y zwischen den Grenzen 0 und c, respective 0 und c' integrirt und darauf die untere von der oberen subtrahirt. Es ist nämlich in Folge der Bedeutung von m und n das Integral

$$\int_0^c \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} \cdot \sin ny . dy = \frac{n}{m^2-n^2},$$

also von c unabhängig; es verschwinden daher die Factoren der C_m durch die Subtraction. Es verschwinden ferner die Coefficienten der übrigen B_n, und man findet so

$$(21.)\quad B_n = \frac{2}{c+c'} \left\{ \int_0^c \Psi_2(y) \sin ny . dy - \int_0^{c'} \Psi_3(y) \sin ny . dy \right\}.$$

Fast ebenso verfährt man mit den letzten Gleichungen (20.), um ein C_m zu finden. Multiplicirt man die obere mit $\frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} dy$, integrirt sie zwischen den Grenzen 0 und c, multiplicirt man ferner die letzte Gleichung mit $\frac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'} dy$ und integrirt von 0 bis c', und addirt man darauf beide Gleichungen, so verschwinden nach dem oben genannten Integralsatze aus der Summe sämmtliche B_n. Irgend ein von C_m verschiedenes C_{m_1} erhält nach den Gleichungen (16.) den Coefficienten

$$\frac{m_1(\operatorname{ctg} m_1 c + \operatorname{ctg} m_1 c') - m(\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc')}{m^2 - m_1^2},$$

der nach Gleichung (10.) den Werth

$$\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\alpha^4}{m^2 m_1^2}-1\right)$$

besitzt. Multiplicirt man also noch die erste Gleichung (20.) mit $\frac{1}{2\beta}$, die zweite mit $-\frac{1}{2\beta}\frac{\alpha^4}{m^2}$ und addirt sie zu der erhaltenen Gleichung, so verschwinden die sämmtlichen C_m mit Ausnahme des gesuchten. Durch Benutzung der Gleichung (10.) reducirt sich der so erhaltene Werth auf die Form

$$(22.)\quad C_m = 2\frac{2\beta\left\{\int_0^c \Psi_2(y)\frac{\sin m(c-y)}{\sin mc}dy+\int_0^{c'}\Psi_3(y)\frac{\sin m(c'-y)}{\sin mc'}dy\right\}+\Psi_1+\frac{\alpha^4}{m^2}\Phi}{2\beta\left\{\frac{c}{\sin^2 mc}+\frac{c'}{\sin^2 mc'}\right\}-\frac{3\alpha^4}{m^4}+1}.$$

Damit sind alle Constanten bestimmt und ist sämmtlichen Gleichungen genügt. Das Problem ist also in der angegebenen Annäherung durchgeführt, wenn die Gleichungen (10.) und (9.) aufgelöst sind.

§. 7.

Ich unterwerfe diese Gleichungen einer besonderen Discussion für den Fall einer unbegrenzten Flüssigkeit, in welchem

$$(1.)\quad c = c' = \infty.$$

Was zunächst die Grösse n betrifft, so ist sie in diesem Falle allen ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{c}=\frac{\pi}{c'}$ gleich zu setzen. Sie wird also eine continuirlich wachsende Grösse, deren Differential

$$(2.)\quad dn = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{c'}$$

ist. Die äussersten Grenzen dieser Grösse sind 0 und ∞. Die zugehörige Constante B_n wird unendlich klein und zwar wird

$$(3.)\quad B_n = \frac{dn}{\pi}\int_0^\infty \{\Psi_2(y)-\Psi_3(y)\}\sin ny\,.\,dy.$$

Aehnlich verhält es sich mit den reellen Werthen von m. Genügt der Gleichung (10.) §. 6 der reelle Werth m, so genügt ihr auch der unendlich wenig grössere Werth

$$m+\frac{\pi}{c} = m+\frac{\pi}{c'}.$$

Also auch die reellen Werthe von m bilden eine continuirlich wachsende Grösse, deren Differential

$$(4.)\qquad dm = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{c'}$$

ist. Die Grenzen sind wieder 0 und ∞. In dem zugehörigen Werthe von C_m (Gleichung (22.) §. 6) verschwinden die letzten Glieder des Nenners gegen das erste. Der ganze Ausdruck wird unendlich klein. Eliminirt man die noch vorkommenden sin. und cos. von $mc = mc'$ durch die Gleichung (10.) §. 6, welche die Form

$$\operatorname{ctg} mc = \operatorname{ctg} mc' = \frac{1}{4\beta}\,\frac{m^4-\alpha^4}{m^3}$$

annimmt, so erhält man

$$(5.)\qquad C_m = 8\beta m^6 dm \frac{\int_0^\infty \{\Psi_2(y)+\Psi_3(y)\}\left\{2\beta\cos my - \frac{m^4-\alpha^4}{2m^3}\sin my\right\}dy + \Psi_1 + \frac{\alpha^4}{m^2}\Phi}{(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2}.$$

Diese Gleichung gilt indess nicht für die imaginären Werthe von m. Es giebt deren in diesem Falle zwei. Setzt man in Gleichung (10.) §. 6 $m = a \pm bi$, wo a eine reelle, b eine positive reelle Grösse bedeutet und $i = \sqrt{-1}$ ist, so nehmen die Cotangenten den Werth $\mp i$ an, und die Gleichung (10.) §. 6 erhält in dem einen oder anderen Falle die Form

$$(6.)\qquad 0 = m^4 \pm 4i\beta m^3 + \alpha^4.$$

In dieser Gleichung ist das Vorzeichen des zweiten Gliedes das obere oder das untere, je nachdem der in i multiplicirte Theil von m positiv oder negativ ist. Diese Bestimmung enthält eine Beschränkung derjenigen Wurzeln dieser Gleichung vierten Grades, welche jener transcendenten Gleichung (10.) §. 6 für den Fall $c = c' = \infty$ genügen.

Ich werde nachweisen, dass hierdurch b und a^2 eindeutig bestimmt sind, dass also die betrachtete Gleichung (10) §. 6 in dem in Rede stehenden Falle nur vier complex-imaginäre Wurzeln von der Form

$$m = a+bi,\quad a-bi,\quad -a+bi,\quad -a-bi$$

hat; und ferner, dass, so lange die in der Gleichung vorkommenden constanten Coefficienten positiv und von Null verschieden sind, immer ein solches b existirt.

Durch die Substitution $m = \pm zi$ wird die Gleichung (6.)

$$(7.)\qquad 0 = z^4 + 4\beta z^3 + \alpha^4.$$

Von den vier Wurzeln dieser Gleichung können höchstens zwei reell sein. Dies folgt aus der geometrischen Construction der Curve

$$x = s^4+4\beta s^3+\alpha^4$$

für alle positiven und negativen reellen Werthe der Abscisse s. Durch Differentiation ist

$$\frac{dx}{ds} = 4(s^3+3\beta s^2),$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 3.4(s^2+2\beta s).$$

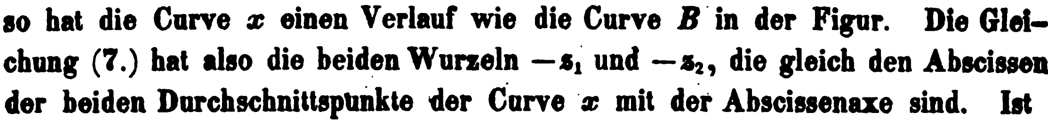
Beide Differentialquotienten verschwinden für $s=0$. Hier hat also die Curve einen Wendepunkt. Auf der ganzen positiven Seite sind x und seine Differentialquotienten positiv; die Curve liegt also hier auf der positiven Seite der Abscissenaxe und wendet dieser ihre convexe Seite zu. Für negative s hat x ein Minimum für

$$s = -3\beta.$$

Hier wird

$$x = \alpha^4-3^3\beta^4$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 36.\beta^2.$$



Ist also (8^a.) $\alpha^4 < 3^3\beta^4$,

so hat die Curve x einen Verlauf wie die Curve B in der Figur. Die Gleichung (7.) hat also die beiden Wurzeln $-s_1$ und $-s_2$, die gleich den Abscissen der beiden Durchschnittspunkte der Curve x mit der Abscissenaxe sind. Ist

(8^b.) $\alpha^4 = 3^3\beta^4$,

so fallen beide Durchschnittspunkte zusammen, es wird $s_1=s_2$. Ist aber

(8^c.) $\alpha^4 > 3^3\beta^4$,

so schneidet die Curve die Abscissenaxe gar nicht, wie die Curve A in der Figur; es hat dann also auch die Gleichung (7.) keine reellen Wurzeln.

Gilt die Bedingung (8^a.) oder auch (8^b.), so zerfällt demnach die Gleichung (7.) auf folgende Weise in einfache Factoren:

(9^a.) $0 = (s+s_1)(s+s_2)(s-b-ai)(s-b+ai)$,

wo s_1 und s_2 positive Grössen sind. Die ersten beiden Factoren entsprechen also keinen Wurzeln der transcendenten Gleichung (10.) §. 6, die beiden

letzten Glieder nur dann den vier Wurzeln $m = \pm(a \pm bi)$, wenn b positiv ist. Dies ist in der That immer der Fall, wenn die Coefficienten der Gleichung (7.) positiv sind. Indem man die Coefficienten gleicher Potenzen von s in den Gleichungen (7.) und (9^a.) einander gleich setzt, erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\beta &= s_1 + s_2 - 2b, \\ 0 &= s_1 s_2 + a^2 + b^2 - 2b(s_1 + s_2), \\ 0 &= (a^2+b^2)(s_1+s_2) - 2b s_1 s_2, \\ \alpha^4 &= s_1 s_2 (a^2+b^2). \end{aligned}$$

Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen folgt sofort, dass b positiv ist, da alle anderen Buchstaben positive Grössen bedeuten. Ferner ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen leicht die Relation

$$(a^2-b^2)(s_1+s_2) = (a^2+b^2)\frac{s_1+s_2-2b}{2}$$

und, da hierin nach der ersten der obigen Gleichungen die rechte Seite einen positiven Werth hat, so ist

$$a^2 - b^2 > 0,$$

was mit Gleichung (14.) §. 6 in Uebereinstimmung ist.

Ganz ebenso kann man in dem Falle verfahren, dass die Bedingung (8^a.) erfüllt ist. Dann hat die Gleichung (7.) keine reelle Wurzel, sondern ihre Zerlegung in Factoren hat die Form

$$(9^b.) \quad 0 = (s-b-ai)(s-b+ai)(s+b_1-a_1 i)(s+b_1+a_1 i),$$

wo a, a_1, b, b_1 reell sind. Es soll bewiesen werden, dass sie auch positiv sind. Ich setze die Gleichung (9^b.) der Gleichung (7.) identisch gleich und erhalte dadurch die Relationen

$$\begin{aligned} 2\beta &= b_1 - b, \\ 0 &= a^2+b^2+a_1^2+b_1^2 - 4bb_1, \\ 0 &= (a^2+b^2)b_1 - (a_1^2+b_1^2)b, \\ \alpha^4 &= (a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2). \end{aligned}$$

Die erste, zweite und dritte Gleichung können nur bestehen, wenn entweder b und b_1 beide positiv oder beide negativ sind. Diese beiden Fälle gehen in einander über durch Vertauschung der Buchstaben mit und ohne Striche in Gleichung (9^b.). Ich darf daher beide positiv setzen, womit die obige Behauptung bewiesen ist. Von den Wurzeln der Gleichung (9^b.) entsprechen daher nur die zwei

$$s = b \pm ai$$

Wurzeln der transcendenten Gleichung (10.) §. 6 und zwar den vier Wurzeln

$$m = \pm(a \pm bi).$$

Diese Gleichung hat also in allen durch die Ungleichheiten (8.) characterisirten Fällen zwei Paare complex-imaginärer Wurzeln. Aus der zweiten und dritten der letzten Gleichungen folgt ferner

$$0 = (a^2+b^2)(b-b_1)+2(a^2-b^2)b_1,$$

und daraus nach der ersten Gleichung

$$a^2-b^2>0;$$

dagegen ergiebt sich ebenso

$$0 = (a_1^2+b_1^2)(b_1-b)+2(a_1^2-b_1^2)b,$$

$$a_1^2-b_1^2<0.$$

Im Folgenden habe ich somit ausser der unendlichen Reihe reeller m von den Wurzeln der Gleichung (6.), theils wegen der erwähnten Beschränkung, theils weil gleiche Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen in den Endausdrücken der ψ sich nicht trennen, noch zwei, etwa

$$m = \pm a+bi,$$

zu berücksichtigen. Die angenäherten Werthe dieser Wurzeln sind für den Fall eines kleinen η

$$\pm a+bi = \frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}\alpha.$$

Für diese complex-imaginären Wurzeln nimmt die Constante C_m (Gleichung (22.) §. 6) eine von der für die reellen m gültigen verschiedene Form an. Es verschwindet für $m=\pm a+bi$, $c_2=c_3=\infty$ die Grösse

$$\frac{c_2}{\sin^2 mc_2}+\frac{c_3}{\sin^2 mc_3}$$

im Nenner der Gleichung (22.). Der übrige Theil des Nenners lässt sich durch die Gleichung (6.) auf eine bequemere Form bringen. So erhält man

$$(10.)\quad C_{\pm a+bi} = \frac{2\beta\int_0^\infty \{\Psi_2(y)+\Psi_3(y)\}\{\cos(\pm a+bi)y+i\sin(\pm a+bi)y\}dy+\Psi_1+\frac{\alpha^4}{(\pm a+bi)^3}\Phi}{2\left(1+3i\frac{\beta}{\pm a+bi}\right)}.$$

Aus diesen Elementen lassen sich die Functionen φ_1, ψ_1, ψ_2 und ψ_3 vollständig entwickeln. Für jede dieser Functionen führe ich drei neue Functionen ein. Ich setze

$$(11.)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1^{(0)}+\varphi_1^{(1)}+\varphi_1^{(2,3)}, \\ \psi_1 = \psi_1^{(0)}+\psi_1^{(1)}+\psi_1^{(2,3)}, \\ \psi_2 = \psi_2^{(0)}+\psi_2^{(1)}+\psi_2^{(2,3)}, \\ \psi_3 = \psi_3^{(0)}+\psi_3^{(1)}+\psi_3^{(3,2)}, \end{cases}$$

und verstehe unter den Functionen mit dem oberen Index (0) diejenigen Theile, die mit Φ verschwinden; unter denen mit dem Index (1) die mit Ψ_1 ver-

schwindenden, und endlich unter denen mit dem Index (2, 3) oder (3, 2) diejenigen, die für $\Psi_2(y)=0$ und $\Psi_3(y)=0$ fortfallen. Jede dieser Functionen ist aus drei Gliedern zusammengesetzt. Das erste dieser Glieder ist das particulare Integral, das von der Wurzel $m=+a+bi$ herrührt; das zweite schreibt sich ebenso von der Wurzel $-a+bi$ her. Ich werde im Folgenden diese beiden Glieder, die sich nur durch verschiedene Vorzeichen unterscheiden, durch die Bezeichnung zu einem zusammenfassen, indem ich unter einem Summenzeichen Σ beide Vorzeichen andeute. Das dritte Glied jener Functionen ist aus den particularen Integralen der sämmtlichen reellen m und der mit ihnen zusammenfallenden n entstanden. Dieselben vereinigen sich nach der obigen Discussion der transcendenten Gleichungen zu einem zwischen den Grenzen 0 und ∞ auszuführenden Integrale nach $dm=dn$.

Statt der gesuchten Functionen, Gleichungen (11.), entwickle ich eine allgemeinere Function χ, die in derselben Weise aus drei anderen Functionen zusammengesetzt ist,

$$(12.)\qquad \chi=\chi^{(0)}+\chi^{(1)}+\chi^{(2,3)}.$$

Durch specielle Annahmen erhalte ich aus dieser die vier gesuchten Functionen.

Ich bezeichne zur Abkürzung

$$(13.)\qquad J(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{m^{2p+1}\{4\beta m^3\cos my-(m^4+\alpha^4)\sin my\}}{(-m^2)^q\{(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2\}}e^{-m^2t}\,dm$$

und unterscheide die Werthe, die diese Function für verschiedene Parameter p und q annimmt, durch Indices, so dass ich den Werth von p unten, den von q oben an den Buchstaben J setze; ich bezeichne ferner

$$(14.)\qquad F(y)=\{\cos(2abt-ay)\mp i\sin(2abt-ay)\}e^{-by}.e^{-(a^2-b^2)t}.$$

Dann kann ich die Functionen χ schreiben

$$(15.)\quad\begin{cases}\chi^{(0)}=\Sigma\Big\{\Big(\frac{-1}{(a\pm bi)^2}\Big)^q\frac{\frac{\alpha^4}{a\pm bi}\Phi}{2\{a\pm bi\pm 3\beta i\}}F(y)\Big\}+\alpha^4\Phi J_0(y),\\ \chi^{(1)}=\Sigma\Big\{\Big(\frac{-1}{(a\pm bi)^2}\Big)^q\frac{(a\pm bi)\Psi_1}{2\{a\pm bi\pm 3\beta i\}}F(y)\Big\}+\Psi_1 J_1(y),\\ \chi^{(2,3)}=\Sigma\Big\{\Big(\frac{-1}{(a\pm bi)^2}\Big)^q\frac{(a\pm bi)\beta}{a\pm bi\pm 3\beta i}\Big\}\int_0^{\infty}\{\Psi_2(y_1)+\Psi_3(y_1)\}F(y+y_1)\,dy_1\\ \qquad+2\beta\int_0^{\infty}\{\Psi_2(y_1)+\Psi_3(y_1)\}J_1(y+y_1)\,dy_1\\ \qquad+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\Psi_2(y_1)\{\cos m(y-y_1)-\cos m(y+y_1)\}e^{-m^2t}\,dm\,dy_1.\end{cases}$$

Hierin hat das Zeichen Σ die oben erwähnte Bedeutung.

Aus dieser Function χ erhalte ich φ_1, wenn ich $y=0$ und $q=1$ setze; ψ_1, indem ich $y=0$ und $q=0$ setze; ψ_2, wenn $q=0$ gesetzt, und endlich ψ_3, wenn ausserdem noch die Indices 2 und 3 vertauscht werden. Dass dies richtig ist, ersieht man leicht aus den entwickelten Ausdrücken, die fast unverändert eingesetzt sind. Es ist nur, um Verwechslungen zu vermeiden, die in den Gleichungen (3.), (5.) und (10.) vorkommende Integration nach y durch eine solche nach der neuen Variablen y_1, ersetzt. Es ist ferner die Ordnung der Integrationen nach dm und dy_1 vertauscht, was erlaubt ist, da die Grenzen beider Integrationen 0 und ∞ sind. Endlich ist das letzte Glied von $\chi^{(2,3)}$ durch theilweise Division in zwei einfachere aufgelöst worden.

Die weitere Transformation der Ausdrücke hat zunächst den Zweck, die Integrale J auf gewisse transcendente Functionen zurückzuführen, die den ersten Gliedern in jeder der Functionen χ ganz analog gebildet sind und, wie diese, die Constanten a und b und ausserdem a_1 und b_1, respective s_1 und s_2, die Bestandtheile der anderen Wurzeln der Gleichung (6.), enthalten.

Es ist nämlich der zweite Factor im Nenner des Integrals J Gleichung (13.)

$$(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2$$

nichts Anderes als das Product der rechten Seite der Gleichung (6.) mit dem oberen Vorzeichen in dieselbe mit dem unteren Vorzeichen. Es ist also

$$(16.)\qquad (m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2 = \Pi(m^2-\mu^2),$$

wo das Zeichen Π das Product der vier Werthe der Function $m^2-\mu^2$ bezeichnet, in welchen das Argument μ^2 gleich den Quadraten der Wurzeln der Gleichung (6.) gesetzt ist. Die vier Werthe von μ selber sind also entweder die Wurzeln der Gleichung (6.) für das obere Vorzeichen, oder diejenigen für das untere. Um in der Folge die doppelten Vorzeichen zu vermeiden, setze ich fest, dass μ den vier Wurzeln der Gleichung (6.) für den Fall des oberen Vorzeichens gleich zu setzen sei, dass also

$$(17.)\qquad 0 = \mu^4+\alpha^4+4i\beta\mu^3$$

sei. Ich werde weiterhin voraussetzen, dass die Bedingung (8^c.)

$$\alpha^4 > 3^3\beta^4,$$

welche für kleine Werthe der Reibungsconstanten gilt, erfüllt sei, dass also die Wurzeln der Gleichung (17.) die Formen

$$(18.)\qquad \mu = \pm a+bi,\quad \pm a_1-b_1i$$

besitzen.

Demnach erhalte ich, wenn ich das Integral J in Partialbrüche zerlege, vier Terme, welche von diesen vier Werthen von μ abhängen, ausserdem

für den Fall, dass $q > 0$ ist, noch Glieder, welche von der Wurzel $m = 0$ des Nenners der Gleichung (13.) abhängen. Man sieht indess leicht ein, dass diese Glieder der allgemeineren Function χ aus den gesuchten Specialwerthen, den Functionen φ und ψ, verschwinden, da in diesen die Parameter p und q nur die Werthe 0 und 1 annehmen und da insbesondere, nur wenn $y = 0$ zu setzen ist, gleichzeitig $p = 0$ und $q = 1$ ist. Ich kann daher jene Glieder gleich hier fortlassen und erhalte so durch Zerlegung in Partialbrüche unter Benutzung der Gleichung (17.)

$$(19.)\quad J(y) = (-1)^q \frac{i}{2\pi} \Sigma \left\{ \frac{\mu^{2(p-1)}}{\mu+3\beta i} \left(\int_0^\infty \frac{dm \cos my}{m^2-\mu^2} e^{-m^2 t} + \frac{i}{\mu} \int_0^\infty \frac{dm\, m \sin my}{m^2-\mu^2} e^{-m^2 t} \right) \right\},$$

wo die nach μ auszuführende Summe sich auf die unter (18.) aufgeführten Werthe bezieht.

Da ich in der Folge gezwungen sein werde, den Ausdruck in einer Weise weiter zu transformiren, die für den Werth $t = 0$ nicht erlaubt zu sein braucht, so halte ich es für zweckmässig, hier einen Beweis dafür einzuschalten, dass für $t = 0$ die gefundenen Werthe der Functionen φ_1, ψ_1, ψ_2, ψ_3 wirklich gleich den gegebenen Φ, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 werden. Ein besonderer Nachweis hierfür scheint mir namentlich deshalb zweckmässig, weil das Auftreten der doppelten transcendenten Gleichung für m und n Bedenken erregen könnte.

Aus Gleichung (19.) folgt für $t = 0$

$$(20.)\quad (J(y)) = (-1)^q \frac{i}{2\pi} \Sigma \left\{ \frac{\mu^{2(p-1)}}{\mu+3\beta i} \left(\int_0^\infty \frac{dm \cos my}{m^2-\mu^2} + \frac{i}{\mu} \int_0^\infty \frac{dm\, m \sin my}{m^2-\mu^2} \right) \right\},$$

wo $(J(y))$ den Werth von $J(y)$ für $t = 0$ bedeuten möge. Den Werth der hierin vorkommenden Integrale erhält man für positive y durch ein- und zweimalige Differentiation nach y aus dem des Integrals

$$N = \int_0^\infty \frac{dm \sin my}{m(m^2-\mu^2)}.$$

Man findet aus der Differentialgleichung

$$0 = \frac{d^2N}{dy^2} + \mu^2 N + \int_0^\infty \frac{\sin my}{m} dm = \frac{d^2N}{dy^2} + \mu^2 N + \tfrac{1}{2}\pi,$$

indem man beachtet, dass für $y = 0$ auch $N = 0$, dass für $y = \infty$ aber N nicht $= \infty$ werden kann, für positive y

$$\int_0^\infty \frac{dm \sin my}{m(m^2-\mu^2)} = -\frac{\pi}{2\mu^2}\{1 - e^{i\mu y}\}, \qquad \text{wenn } \mu = \pm a + bi,$$

$$\int_0^\infty \frac{dm \sin my}{m(m^2-\mu^2)} = -\frac{\pi}{2\mu^2}\{1 - e^{-i\mu y}\}, \qquad \text{wenn } \mu = \pm a_1 - b_1 i \text{ ist.}$$

Daraus folgt, unter derselben Bedingung $y > 0$,

$$(21.)\quad \begin{cases} & \text{für } \mu = \pm a + bi, \qquad \mu = \pm a_1 - b_1 i, \\ \int_0^\infty \frac{dm \cos my}{m^2 - \mu^2} = & i\frac{\pi}{2\mu} e^{i\mu y}, \qquad -i\frac{\pi}{2\mu} e^{-i\mu y}, \\ \int_0^\infty \frac{dm\, m \sin my}{m^2 - \mu^2} = & \tfrac{1}{2}\pi e^{i\mu y}, \qquad \tfrac{1}{2}\pi e^{i\mu y}. \end{cases}$$

Es verschwinden also aus der Gleichung (20.) die von $\pm a_1 - b_1 i$ abhängenden Glieder, und man erhält unter Anwendung der in den Gleichungen (15.) gebrauchten Bezeichnung durch Σ

$$(22.)\quad (J(y)) = -\Sigma\left\{\left(\frac{-1}{(\pm a + bi)^2}\right)^q \frac{(\pm a + bi)^{2p-1}}{2\{\pm a + bi + 3\beta i\}} (F(y))\right\},$$

wo wieder $(F(y))$ den Werth von $F(y)$ für $t = 0$ bezeichnet.

Setzt man, indem man $q = 0$ nimmt, diesen Werth in die Gleichungen (15.), so erhält man für $t = 0$

$$\psi_2^{(0)} = 0; \quad \psi_2^{(1)} = 0;$$

$$\psi_2^{(2,3)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty dm\, dy_1\, \Psi_2(y_1)\{\cos m(y - y_1) - \cos m(y + y_1)\} = \Psi_2(y),$$

also wird für $t = 0$ und $y > 0$

$$(23.)\quad \begin{cases} \psi = \Psi_2(y) \\ \text{und ebenso} \\ \psi_3 = \Psi_3(y). \end{cases}$$

Für $y = 0$ folgt aus den bewiesenen Gleichungen, da y_1 immer > 0 ist, für $t = 0$

$$(24.)\quad \psi_1^{(2,3)} = 0, \quad \varphi_1^{(2,3)} = 0.$$

Die übrigen vier Functionen hängen ab von dem Integral

$$(25.)\quad (J(0)) = (-1)^q \frac{i}{2\pi}\Sigma\left\{\frac{\mu^{2(p-q)}}{\mu + 3\beta i}\int_0^\infty \frac{dm}{m^2 - \mu^2}\right\}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{dm}{m^2 - (a+bi)^2} = \frac{1}{2(a+bi)}\left\{\int_0^\infty dm \frac{m - a + bi}{(m-a)^2 + b^2} - \int_0^\infty dm \frac{m + a - bi}{(m+a)^2 + b^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2(a+bi)}\left[\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{(m-a)^2 + b^2}{(m+a)^2 + b^2}\right) + i \operatorname{arctg}\frac{2bm}{a^2 + b^2 - m^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi i}{2(a+bi)}$$

und ebenso

$$\int_0^\infty \frac{dm}{m^2 - (a - bi)^2} = -\frac{\pi i}{2(a - bi)}.$$

Also erhält man aus Gleichung (25.) durch Ausführung der Integrationen

$$(J(0)) = (-1)^{q+1}\tfrac{1}{4}\Sigma\left\{\frac{(\pm a+bi)^{2(p-q)-1}}{\pm a+(b+3\beta)i}-\frac{(\pm a_1-b_1 i)^{2(p-q)-1}}{\pm a_1-(b_1-3\beta)i}\right\}$$

oder

$$(26.)\qquad (J(0)) = (-1)^{q+1}\tfrac{1}{4}\Sigma\left\{\frac{(a\pm bi)^{2(p-q)-1}}{a\pm(b+3\beta)i}-\frac{(a_1\mp b_1 i)^{2(p-q)-1}}{a_1\mp(b_1-3\beta)i}\right\}.$$

Setze ich diesen Werth mit den vorgeschriebenen Parametern $p=0$ und $p=1$ in die Gleichungen (15.), nachdem in denselben $y=0$ und $t=0$ gesetzt worden ist, so werden die ersten Glieder der Summe (26.) durch die Hälfte der ersten Glieder der Gleichungen (15.) zerstört. Ich finde demnach folgende für $y=0$ und $t=0$ gültige Werthe der Functionen $\chi^{(0)}$ und $\chi^{(1)}$:

$$(27.)\qquad \begin{cases} \chi^{(0)} = (-1)^{q}\tfrac{1}{4}\Sigma\left\{\dfrac{(a\pm bi)^{-2q-1}}{a\pm(b+3\beta)i}+\dfrac{(a_1\mp b_1 i)^{-2q-1}}{a_1\mp(b_1-3\beta)i}\right\}\alpha^4\Phi, \\ \chi^{(1)} = (-1)^{q}\tfrac{1}{4}\Sigma\left\{\dfrac{(a\pm bi)^{-2q+1}}{a\pm(b+3\beta)i}+\dfrac{(a_1\mp b_1 i)^{-2q+1}}{a_1\mp(b_1-3\beta)i}\right\}\Psi_1 \end{cases}$$

oder, wenn ich unter Σ wieder eine Summe nach den unter (18.) aufgezählten Wurzeln der Gleichung (17.) verstehe,

$$(28.)\qquad \begin{cases} \chi^{(0)} = (-1)^{q}\tfrac{1}{4}\,\alpha^4\Phi\,\Sigma\left\{\dfrac{(\mu i)^{-2q-1}}{\mu i-3\beta}\right\}, \\ \chi^{(1)} = (-1)^{q}\,\tfrac{1}{4}\,\Psi_1\,\Sigma\left\{\dfrac{(\mu i)^{-2q+1}}{\mu i-3\beta}\right\}. \end{cases}$$

Der Werth dieser Grössen als symmetrischer Functionen aller Wurzeln der Gleichung (17.) lässt sich aus dieser leicht bestimmen. Man hat zunächst

$$\Sigma\frac{\mu i}{\mu i-3\beta} = \left(\frac{d}{d\lambda}\log\Pi(\lambda\mu i-3\beta)\right)_{\lambda=1}.$$

Substituire ich nun in Gleichung (17.)

$$\nu=\lambda\mu i-3\beta,\qquad \mu=-\frac{i}{\lambda}(\nu+3\beta),$$

so wird dieselbe

$$0=(\nu+3\beta)^4-4\beta\lambda(\nu+3\beta)^3+\alpha^4\lambda^4=f(\nu).$$

Demnach ist

$$\Pi(\lambda\mu i-3\beta)=\Pi(\nu)=f(0)=\alpha^4\lambda^4-(\tfrac{4}{3}\lambda-1)(3\beta)^4.$$

Setzt man diesen Werth des Productes ein, so findet man als Werth der gesuchten Summe

$$(29^a.)\qquad \Sigma\frac{\mu i}{\mu i-3\beta} = 4.$$

Ferner ist

$$\Sigma\frac{1}{\mu i(\mu i-3\beta)} = \frac{1}{3\beta}\left\{i\Sigma\frac{1}{\mu}+\Sigma\frac{1}{\mu i-3\beta}\right\}.$$

Nun ist $\Sigma\frac{1}{\mu}$, als negativer Coefficient der ersten Potenz von μ in Gleichung (17.), dividirt durch das constante Glied derselben, gleich Null; aus demselben Grunde ist die zweite Summe gleich Null, da $f(\nu)$ für $\lambda = 1$ die erste Potenz von ν nicht enthält. Es ist also

$$(29^b.)\qquad \Sigma\frac{1}{\mu i(\mu i-3\beta)} = 0.$$

Endlich ist

$$\Sigma\frac{1}{(\mu i)^2(\mu i-3\beta)} = -\frac{1}{3\beta}\Sigma\left\{\frac{i}{\mu^3}-\frac{1}{3\beta}\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{(3\beta)^2}\frac{i}{\mu}-\frac{1}{(3\beta)^2}\frac{1}{\mu i-3\beta}\right\},$$

und hieraus erhält man auf dieselbe Weise

$$(29^c.)\qquad \Sigma\frac{1}{(\mu i)^2(\mu i-3\beta)} = -\frac{4}{\alpha^4}.$$

Wendet man diese Theoreme (29.) auf die Formeln (28.) für $q=0$ und $q=1$ an, so findet man für $t=0$

$$(30.)\qquad \begin{cases}\psi_1^{(0)} = 0, & \psi_1^{(1)} = \Psi_1,\\ \varphi_1^{(0)} = \Phi, & \varphi_1^{(1)} = 0\end{cases}$$

und hieraus in Verbindung mit den Gleichungen (24.)

$$(31.)\qquad \psi_1 = \Psi_1,\quad \varphi_1 = \Phi \quad \text{für}\quad t=0.$$

Somit ist bewiesen, dass die vier Functionen φ_1, ψ_1, ψ_2, ψ_3 für den Werth ihres Arguments $t=0$ wirklich die beliebigen Anfangswerthe darstellen. Es ist also bewiesen, dass die aus den Gleichungen (15.) sich ergebenden Ausdrücke dieser vier Functionen *das vollständige Integral der Gleichungen* enthalten.

Zum Zwecke der für endliche Werthe von t gültigen Transformation der Gleichungen (15.) bringe ich den in Gleichung (19.) angegebenen Werth von J auf eine bequemere Form und zwar mittelst der folgenden bestimmten Integrale.

Es ist, wenn m reell und

$$\mu = \pm a+bi; \qquad\qquad \mu = \pm a_1-b_1 i \quad \text{ist,}$$

$$\int_0^\infty du.\cos mu.e^{\mu iu} = -\frac{\mu i}{m^2-\mu^2};\quad \int_0^\infty du.\cos mu.e^{-\mu iu} = \frac{\mu i}{m^2-\mu^2},$$

$$\int_0^\infty du.\sin mu.e^{\mu iu} = \frac{m}{m^2-\mu^2};\quad \int_0^\infty du.\sin mu.e^{-\mu iu} = \frac{m}{m^2-\mu^2}.$$

Durch Benutzung dieser Theoreme erhalte ich aus der Gleichung (19.)

$$J(y) = (-1)^{q+1}\frac{1}{2\pi}\Big\{\Sigma\Big(\frac{(\pm a+bi)^{2(p-q)-1}}{\pm a+bi+3\beta i}\int_0^\infty\int_0^\infty dm.du.\cos m(u-y).e^{\pm iau}.e^{-bu}.e^{-m^2 t}\Big)$$

$$-\Sigma\Big(\frac{(\pm a_1-b_1 i)^{2(p-q)-1}}{\pm a_1-b_1 i+3\beta i}\int_0^\infty\int_0^\infty dm.du.\cos m(u+y).e^{\mp ia_1 u}.e^{-b_1 u}.e^{-m^2 t}\Big)\Big\},$$

in welcher das Zeichen Σ die bereits pag. 260 erörterte Bedeutung hat. Da die Ordnung der Integrationen vertauscht werden darf, so kann ich zuerst nach dm integriren und erhalte so

$$J(y) = (-1)^{q+1}\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\Big\{\Sigma\Big(\frac{(\pm a+bi)^{2(p-q)-1}}{\pm a+bi+3\beta i}\int_0^\infty du.e^{\pm iau}.e^{-bu}.e^{-\frac{(u-y)^2}{4t}}\Big)$$

$$-\Sigma\Big(\frac{(\pm a_1-b_1 i)^{2(p-q)-1}}{\pm a_1-b_1 i+3\beta i}\int_0^\infty du.e^{\mp ia_1 u}.e^{-b_1 u}.e^{-\frac{(u+y)^2}{4t}}\Big)\Big\}.$$

Im ersten Integrale ersetze ich $b\sqrt{t}+\frac{u-y}{2\sqrt{t}}$ und im zweiten $b_1\sqrt{t}+\frac{u+y}{2\sqrt{t}}$ durch eine neue Variable. Indem ich zur Abkürzung bezeichne

$$G(y) = e^{-by}e^{b^2 t}\int_u^\infty du\,\{\cos v \pm i\sin v\}e^{-u^2},$$

$$G'(y) = e^{b_1 y}e^{b_1^2 t}\int_{u_1}^\infty du\{\cos v_1 \mp i\sin v_1\}e^{-u^2},$$

worin

$$v = a(2u\sqrt{t}-2bt+y), \qquad v_1 = a_1(2u\sqrt{t}-2b_1 t-y)$$

gesetzt ist, und die Grenzen

$$u = b\sqrt{t}-\frac{y}{2\sqrt{t}}, \qquad u_1 = b_1\sqrt{t}+\frac{y}{2\sqrt{t}}$$

sind, erhalte ich

$$(32.)\quad J(y) = (-1)^{q+1}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big\{\Sigma\Big(\frac{(a\pm bi)^{2(p-q)-1}}{a\pm(b+3\beta)i}G(y)\Big)-\Sigma\Big(\frac{(a_1\pm b_1 i)^{2(p-q)-1}}{a_1\pm(b_1-3\beta)i}G'(y)\Big)\Big\}.$$

Damit ist die Function J auf eine Form gebracht, welche der der übrigen Glieder der Functionen χ (Gleichungen 15.) vollkommen analog ist. Sie unterscheidet sich im Wesentlichen nur dadurch von jenen, dass die Functionen $G(y)$ und $G'(y)$ statt des in $F(y)$ enthaltenen Factors $e^{-a^2 t}$ eine Klasse von Integral-Transcendenten enthalten, welche indess mit den Exponentialgrössen sehr nahe verwandt sind.

Um die gesuchten Functionen φ_1 und ψ in übersichtlicher Gestalt zu erhalten, hat man nur noch nöthig, die nur durch verschiedene Vorzeichen

des Imaginären unterschiedenen Glieder der Gleichungen (15.) und (32.) auf gleiche Benennung zu bringen. Man findet dann aus den Grössen a, b, a_1, b_1 zusammengesetzte Coefficienten, welche sich durch die aus der Gleichung (17.), für $\mu = a+bi$ direct und nach Multiplication mit $(a-bi)^3$ folgenden Relationen

$$(33.)\quad \begin{cases} 0 = a^4-6a^2b^2+b^4+\alpha^4-4\beta b(3a^2-b^2), \\ 0 = b(a^2-b^2)-\beta(3b^2-a^2), \\ 0 = (a^2+b^2)^3-\alpha^4(3b^2-a^2), \\ 0 = (b+4\beta)(a^2+b^2)^3-\alpha^4 b(3a^2-b^2), \end{cases}$$

in denen a mit a_1 und zugleich b mit $-b_1$ vertauscht werden darf, vereinfachen lassen; zum Theil können sie durch die Gleichungen (29.) auf einander zurückgeführt werden.

Indem ich das Endresultat der Rechnung angebe, führe ich für die Coefficienten folgende Bezeichnung ein

$$(34.)\quad \begin{cases} k_1 = \beta\dfrac{b+3\beta}{a^2+(b+3\beta)^2} & = \beta\dfrac{b_1-3\beta}{a_1^2+(b_1-3\beta)^2}, \\ k_2 = \beta\dfrac{a}{a^2+(b+3\beta)^2}; & k_2' = \beta\dfrac{a_1}{a_1^2+(b_1-3\beta)^2}, \\ k_3 = \beta\dfrac{\alpha^2a^2}{b(a^2+b^2)(a^2+(b+3\beta)^2)} & = \beta\dfrac{\alpha^2a_1^2}{b_1(a_1^2+b_1^2)(a_1^2+(b_1-3\beta)^2)}, \\ k_4 = \alpha^2\dfrac{a(2b+3\beta)}{(a^2+b^2)(a^2+(b+3\beta)^2)}; & k_4' = \alpha^2\dfrac{a_1(2b_1-3\beta)}{(a_1^2+b_1^2)(a_1^2+(b_1-3\beta)^2)}. \end{cases}$$

Ferner bezeichne ich zur Abkürzung

$$(35.)\quad \begin{cases} \vartheta = 2abt-ay & \vartheta_1 = 2a_1b_1t+a_1y \\ \vartheta' = 2abt-a(y+y_1) & \vartheta_1' = 2a_1b_1t+a_1(y+y_1) \end{cases}$$

und

$$(36.)\quad \begin{cases} C(-y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_u^\infty du.\cos(2au\sqrt{t})e^{-u^2}; & C'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{u_1}^\infty du.\cos(2a_1u\sqrt{t})e^{-u^2}, \\ S(-y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_u^\infty du.\sin(2au\sqrt{t})e^{-u^2}; & S'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{u_1}^\infty du.\sin(2a_1u\sqrt{t})e^{-u^2}, \end{cases}$$

worin die Grenzen u und u_1 die frühere Bedeutung

$$u = b\sqrt{t}-\frac{y}{2\sqrt{t}}, \qquad u_1 = b_1\sqrt{t}+\frac{y}{2\sqrt{t}}$$

haben; und endlich setze ich

$$(37.)\quad \begin{cases} U(-y) = e^{-by}e^{b^2t}\{(e^{-a^2t}-C(-y))\cos\vartheta - S(-y)\sin\vartheta\}, \\ V(-y) = e^{-by}e^{b^2t}\{(e^{-a^2t}-C(-y))\sin\vartheta + S(-y)\cos\vartheta\}, \\ U'(y) = e^{b_1y}e^{b_1^2t}\{(C'(y)\cos\vartheta_1 + S'(y)\sin\vartheta_1\}, \\ V'(y) = e^{b_1y}e^{b_1^2t}\{(C'(y)\sin\vartheta_1 - S'(y)\cos\vartheta_1\}. \end{cases}$$

Von den gesuchten Functionen φ_1, ψ_1, ψ_2, ψ_3 bilde ich nur φ_1 und ψ_2, weil sich aus letzterer unmittelbar ψ_1 und ψ_3 ergeben; und zwar ψ_3 durch Vertauschung der Indices 2 und 3, und ψ_1, indem man $y=0$ setzt. Ich erhalte so

$$(38.)\quad \begin{cases} \psi_2 = \psi_2^{(0)}+\psi_2^{(1)}+\psi_2^{(2,3)}, \\ \psi_2^{(0)} = \alpha^2\Phi\{-k_3U(-y)+k_3U'(y)-k_4V(-y)-k_4'V'(y)\}, \\ \psi_2^{(1)} = \Psi_1\{(1-3k_1)U(-y)+(1+3k_1)U'(y)-3k_2V(-y)+3k_2'V'(y)\}, \\ \psi_2^{(2,3)} = 2\beta\int_0^\infty(\Psi_2(y_1)+\Psi_3(y_1))\{(1-3k_1)U(-y-y_1)+(1+3k_1)U'(y+y_1) \\ \qquad -3k_2V(-y-y_1)+3k_2'V'(y+y_1)\}dy_1 \\ \qquad +\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\Psi_2(y_1)\{\cos m(y-y_1)-\cos m(y+y_1)\}e^{-m^2t}dm\,dy_1. \end{cases}$$

Ganz ähnlich wird

$$(39.)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1^{(0)}+\varphi_1^{(1)}+\varphi_1^{(2,3)}, \\ \varphi_1^{(0)} = \Phi\{(1+k_1)U(0)+(1-k_1)U'(0)+k_2V(0)-k_2'V'(0)\}, \\ \varphi_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha^2}\Psi_1\{\quad k_3U(0)-\quad k_3U'(0)+k_4V(0)+k_4'V'(0)\}, \\ \varphi_1^{(2,3)} = \frac{2\beta}{\alpha^2}\int_0^\infty(\Psi_2(y_1)+\Psi_3(y_1))\{k_3U(-y_1)-k_3U'(y_1)+k_4V(-y_1)+k_4'V'(y_1)\}dy_1. \end{cases}$$

Ich wende diese Formeln zunächst auf den Fall an, dass keine Reibung stattfinde, dass also η, folglich auch $\beta=0$ sei. Dann folgt aus der Gleichung (17.)

$$a=b=a_1=b_1=\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

es wird also auch

$$k_1=k_2=k_2'=k_3=0, \qquad k_4=k_4'=1.$$

Darnach ist aus den obigen Formeln für $y=0$ leicht der Werth von φ_1 und ψ_1 abzuleiten, der ohne Reibung stattfinden würde. Dagegen ist bei der Bildung von ψ_2 und ψ_3 einige Vorsicht nöthig. Da im Eingange von §. 6 die Substitution

$$x = y\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$$

gemacht ist, so wird, wenn η sich der Grenze 0 nähert, für jeden endlichen Werth der Ordinate x die Grösse y sich der Grenze ∞ nähern. Für $\eta = 0$ verschwinden also die Integrale $C'(y)$ und $S'(y)$, ferner $S(-y)$, während $C(-y)$ den Werth $e^{-\alpha^2 t}$ annimmt. Es verschwinden also für $\eta = 0$ und $x > 0$ die Functionen $U(-y)$, $U'(y)$, $V(-y)$ und $V'(y)$. Was endlich das letzte in $\psi_2^{(2,3)}$ vorkommende Integral anlangt, so erhält man aus demselben, indem man in demselben

$$x = y\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}, \qquad x_1 = y_1\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}, \qquad m\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}} = n$$

setzt, die Form

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi_2\left(x_1\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}\right)\{\cos n(x-x_1) - \cos n(x+x_1)\}\, e^{-n^2\frac{\eta}{\varrho}t}\, dn\, dx_1,$$

welche unzweifelhaft zeigt, dass für $\eta = 0$ der Werth des Integrals

$$\Psi_2\left(x\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}\right)$$

ist.

Die Formeln (38.) und (39.) geben also für $\eta = 0$

$$\psi_2^{(0)} = 0, \quad \psi_3^{(0)} = 0, \quad \psi_1^{(0)} = -\alpha^2\Phi\sin\alpha^2 t, \quad \varphi_1^{(0)} = \Phi\cos\alpha^2 t,$$

$$\psi_2^{(1)} = 0, \quad \psi_3^{(1)} = 0, \quad \psi_1^{(1)} = \Psi_1\cos\alpha^2 t, \quad \varphi_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha^2}\Psi_1\sin\alpha^2 t,$$

$$\psi_2^{(2,3)} = \Psi_2, \quad \psi_3^{(2,3)} = \Psi_3, \quad \psi_1^{(2,3)} = 0, \quad \varphi_1^{(2,3)} = 0,$$

d. h. wenn in der Flüssigkeit keine Reibung stattfindet, so behält jedes Theilchen der Flüssigkeit seine anfängliche Bewegung durch alle Zeit hindurch, während die Scheibe Pendelschwingungen macht, deren Periode

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha^2} = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\tau}}$$

ist.

Findet Reibung statt, so muss, wenn diese Reibung, wie die Erfahrung lehrt, einen geringen Werth besitzt, die Bewegung der Scheibe diesen Charakter im Allgemeinen beibehalten. Die Bewegung der Flüssigkeit dagegen wird durch die Reibung wesentlich alterirt, sie verwandelt sich ebenfalls in eine periodische pendelartige Bewegung. Um dieses aus den entwickelten Gleichungen abzuleiten, ist die Kenntniss der Constanten a, b, a_1, b_1 sowie eine nähere Untersuchung der Functionen C, S, C' und S' erforderlich.

Gestützt auf die Thatsache, dass die Reibungsconstante η aller bekannten Flüssigkeiten klein ist, entwickle ich a, b, a_1, b_1 nach aufsteigenden

Potenzen von β oder, was auf dasselbe hinauskommt, von $\sqrt{\eta}$. Diese Entwicklung lässt sich sehr einfach ausführen, wenn man eine der (durch die Cartesianische Methode zur Auflösung biquadratischer Gleichungen sich ergebenden) Gleichungen

$$0 = \left\{\left(\frac{b+b_1}{2}\right)^2 - \beta^2\right\}^3 - \frac{\alpha^4}{4}\left(\frac{b+b_1}{2}\right)^2,$$

$$0 = (bb_1)^3 - \frac{\alpha^4}{4}\{bb_1+\beta^2\}$$

benutzt. Da jede dieser Gleichungen nur eine positive reelle Wurzel besitzt, so bestimmt eine derselben, verbunden mit der aus der Gleichung (9^b.) abgeleiteten Relation

$$b - b_1 = -2\beta,$$

b und b_1 ohne Zweideutigkeit. Aus den so erhaltenen Werthen findet man a und a_1 durch die Gleichungen

$$b^2 = a^2\frac{b+3\beta}{b+\beta} \quad \text{und} \quad a_1^2 = b_1^2\frac{b_1-3\beta}{b_1-\beta},$$

welche sich leicht aus der Bedeutung der Coefficienten der Gleichung (17.) als symmetrischer Functionen sämmtlicher Wurzeln der Gleichung ableiten lassen.

Man findet auf diese Weise

$$(40.)\quad \begin{cases} a = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\beta^2}{\alpha} + 2\frac{\beta^3}{\alpha^2} - \frac{15}{8\sqrt{2}}\frac{\beta^4}{\alpha^3} + \cdots \\ a_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\beta^2}{\alpha} - 2\frac{\beta^3}{\alpha^2} - \frac{15}{8\sqrt{2}}\frac{\beta^4}{\alpha^3} - \cdots \\ b = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{15}{8\sqrt{2}}\frac{\beta^4}{\alpha^3} + \cdots \\ b_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{15}{8\sqrt{2}}\frac{\beta^4}{\alpha^3} + \cdots \end{cases}$$

Es folgt hieraus die Bestätigung der wichtigen Bemerkung, dass $a > b$ ist, dass also das Product der beiden Exponentialgrössen $e^{b^2 t}$ und $e^{-a^2 t}$ in den Gleichungen (37.) für $t = \infty$ verschwindet.

Was ferner die Functionen C, C', S und S' betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass auch diese für $t = \infty$ verschwinden, wenigstens so lange y endlich bleibt. Für $t = \infty$ verschwinden deshalb auch die Functionen ψ und φ_1, obschon C und S in eine für $t = \infty$ ins Unendliche wachsende Exponentialgrösse multiplicirt sind. Denn es ist, da t nur reelle Werthe hat,

$$-1 < \cos 2au\sqrt{t} < 1, \qquad -1 < \sin 2au\sqrt{t} < 1,$$

folglich ist

$$-\int_u^\infty du\,.\,e^{-u^2} < \int_u^\infty du\,.\cos(2au\sqrt{t})\,.\,e^{-u^2} < \int_u^\infty du\,.\,e^{-u^2},$$

$$-\int_u^\infty du\,.\,e^{-u^2} < \int_u^\infty du\,.\sin(2au\sqrt{t})\,.\,e^{-u^2} < \int_u^\infty du\,.\,e^{-u^2}.$$

Von diesem Integral ist aber bekannt, dass es sich mit wachsendem u weit rascher der Grenze Null nähert als die Exponentialgrösse e^{-u^2}. Es müssen sich also auch die Integrale

$$\int_u^\infty du\,.\cos(2au\sqrt{t})\,.\,e^{-u^2} \quad \text{und} \quad \int_u^\infty du\,.\sin(2au\sqrt{t})\,.\,e^{-u^2}$$

mit wachsendem u noch weit rascher der Grenze Null nähern, als die Exponentialgrösse e^{-u^2}. Es verschwindet also für $t=\infty$ das Product der Exponentialgrösse e^{b^2t}, resp. $e^{b_1^2t}$ mit positivem Exponenten in eine der Functionen C und S. Es verschwinden mithin für $t=\infty$ die Functionen ψ und φ_1.

Dies gilt indess nur für endliche Werthe von y. Wird $y=\infty$ gesetzt, t aber als endlich angenommen, so wird nach den Gleichungen (36.)

$$C(-\infty)=e^{-a^2t}, \qquad C'(\infty)=0,$$
$$S(-\infty)=0, \qquad S'(\infty)=0,$$

und auch diese Werthe machen ψ_2 und $\psi_3=0$. Diese Functionen nehmen also ebenfalls mit wachsendem y, folglich auch mit wachsendem x ab.

Werden y und t beide $=\infty$ gesetzt, so wird $C(-y)$ unbestimmt, e^{-a^2t} oder 0, je nach der Ordnung der beiden ∞. In beiden Fällen wird aber $\psi_2=0$ und $\psi_3=0$.

Für den anderen Grenzwerth $t=0$ geben die Gleichungen (38.) und (39.) ebenfalls richtige Werthe, obwohl die Transformationen für diesen Werth nicht erlaubt zu sein brauchen. Es ist nämlich in Folge der gemachten Substitutionen (p. 266)

$$\frac{y}{\sqrt{t}}=0 \quad \text{für } y=0 \text{ und } t=0,$$

dagegen

$$\frac{y}{\sqrt{t}}=\infty \quad \text{für } y>0 \text{ und } t=0.$$

Es ist demnach für $t=0$

$$C(-y)=1, \qquad C'(y)=0, \qquad y>0,$$
$$C(0)=\tfrac{1}{2}, \qquad C'(0)=\tfrac{1}{2},$$
$$C(-y-y_1)=1, \qquad C'(y+y_1)=0, \qquad y\geqq 0$$

und

$$S(-y)=0, \qquad S'(y)=0,$$
$$S(-y-y_1)=0, \qquad S'(y+y_1)=0.$$

Setzt man diese Werthe ein, so findet man, in Uebereinstimmung mit den Bedingungen der Aufgabe, für $t=0$

$$\varphi_1=\Phi; \quad \psi_1=\Psi_1; \quad \psi_2=\Psi_2; \quad \psi_3=\Psi_3.$$

Auf dem bereits erwähnten Verhalten der Integrale C, C', S und S', mit wachsender unterer Grenze äusserst rasch sich der Grenze Null zu nähern, beruht eine für den Zweck der Beobachtung sehr brauchbare Annäherung, deren die Gleichungen (38.) und (39.) fähig sind. Hat t einen mässig grossen Werth erreicht, hat also die Scheibe einige Pendelschwingungen ausgeführt, so verschwinden die Integrale C, C', S und S' gegen die Exponentialgrösse.

Die Function C nähert sich periodisch von der Zeit $t=0$ an mit raschen Schritten dem Grenzwerthe 0, ebenso C' für das Argument $y=0$, also auf die Scheibe angewandt. Für ein $y>0$ wächst C' anfangs mit wachsendem t bis zu einem Werthe von t, von dem aus es rasch abnimmt; dieser Werth von t ist um so grösser, je grösser y ist. Ganz ähnlich nehmen die Functionen S und S' anfangs mit wachsendem t zu, von einem bestimmten Werthe an aber rasch ab. Dieser Werth von t ist wieder um so grösser, je grösser y ist.

Ein ganz ähnliches Verhalten zeigt das letzte in $\psi_2^{(2,3)}$ vorkommende Integral. Durch Ausführung der Integration nach dm wird aus demselben

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}\int_0^\infty \Psi_2(y_1)\left\{e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4t}}-e^{-\frac{(y+y_1)^2}{4t}}\right\}dy_1.$$

Diese Form zeigt noch deutlicher als die ursprüngliche, dass das Integral mit wachsendem t sehr rasch abnimmt und zwar um so rascher, je kleiner y ist.

Ich bin darnach berechtigt, dieses Integral, sowie die Functionen C und S für grosse Werthe von t gegen die Exponentialgrössen zu vernachlässigen. Der zu dieser Vernachlässigung nöthige Werth von t ist um so kleiner, je kleiner y ist; am kleinsten für $y=0$. Ich begehe also bei der Anwendung der angenäherten Formeln auf die Scheibe, deren Bewegung beim wirklich angestellten Experimente das grösste Interesse bietet, den geringsten Fehler.

Zugleich mit dieser Annäherung lasse ich eine zweite Vernachlässigung eintreten. Ich entwickle der besseren Uebersicht wegen die constanten Coefficienten der Gleichungen (38.) und (39.) nach aufsteigenden Potenzen von $\sqrt{\eta}$.

In dieser Entwicklung vernachlässige ich das Quadrat der Grösse

$$(41.)\qquad \varkappa = \sqrt{2}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

gegen 1. Bei meinen Versuchen ist diese Grösse in der That immer sehr klein. Es wird sich weiter unten ergeben, dass dieselbe dem Exponenten der geometrischen Reihe proportional ist, in der nach *Coulombs* Beobachtung die Amplituden der Scheibe abnehmen.

So finde ich angenähert

$$(42.)\quad \begin{cases} \psi_2 = \psi_2^{(0)} + \psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2,3)}, \\ \psi_2^{(0)} = -\alpha^2 \Phi \left\{\frac{\varkappa}{2}\cos(2abt-ay) + \left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)\sin(2abt-ay)\right\} e^{-b y} e^{-(a^2-b^2)t}, \\ \psi_2^{(1)} = \Psi_1 \left\{\left(1-3\frac{\varkappa}{2}\right)\cos(2abt-ay) - \frac{3}{2}\varkappa\sin(2abt-ay)\right\} e^{-b y} e^{-(a^2-b^2)t}, \\ \psi_2^{(2,3)} = \beta e^{-b y} e^{-(a^2-b^2)t} \int_0^\infty dy_1 \frac{\Psi_2(y_1)+\Psi_3(y_1)}{2} e^{-b y_1} \cos(2abt-ay-ay_1), \\ \varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2,3)}, \\ \varphi_1^{(0)} = \Phi \left\{\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\cos 2abt - \frac{\varkappa}{2}\sin 2abt\right\} e^{-(a^2-b^2)t}, \\ \varphi_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha^2}\Psi_1 \left\{\frac{\varkappa}{2}\cos 2abt + \left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)\sin 2abt\right\} e^{-(a^2-b^2)t}, \\ \varphi_1^{(2,3)} = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-(a^2-b^2)t} \int_0^\infty dy \frac{\Psi_2(y)+\Psi_3(y)}{2} \sin(2abt-ay) e^{-b y}. \end{cases}$$

Diese abgekürzte Form der Gleichungen zeigt auf das Deutlichste den bereits erwähnten Charakter der entstehenden Bewegung. Die Scheibe sowohl wie die Flüssigkeit befinden sich in einer Art von pendelnder Bewegung, deren Amplitude mit wachsendem t wie mit zunehmendem y abnimmt. Die Periode dieser Oscillationen ist für jedes Flüssigkeitstheilchen dieselbe wie für die Scheibe; es ist nämlich die Schwingungsdauer derselben

$$(43.)\qquad T = \frac{\pi}{2ab} = \frac{\pi}{\alpha^2}\left\{1+\varkappa+\varkappa^2-\frac{3}{4}\varkappa^3 \quad +\cdots\right\},$$

wo wie bisher

$$\varkappa = \sqrt{2}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

zur Abkürzung geschrieben ist. Dagegen ist der Zeitpunkt, in welchem ein

Flüssigkeitstheilchen eine Oscillation beginnt, nicht derselbe wie der, in dem die Scheibe eine Schwingung anfängt. Die Oscillation beginnt um so später, je weiter ein Theilchen von der Scheibe entfernt ist. Diese Verspätung beträgt für ein Theilchen in der Entfernung x von der Scheibe

$$(44.)\qquad \frac{y}{2b} = \frac{x}{2b\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}} = \frac{x}{\alpha}\sqrt{\frac{\varrho}{2\eta}}\{1+\varkappa+\cdots\}.$$

Sie ist also um so grösser, je kleiner η, d. h. die Reibung ist. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens ist um so kleiner, je grösser x ist; sie nimmt mit wachsendem x nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe ab; sie ist ferner um so grösser, je grösser die Reibungsconstante ist. Denn die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional einer Exponentialfunction, deren Basis e und deren Exponent

$$(45.)\qquad by = x\alpha\sqrt{\frac{\varrho}{2\eta}}\{1-\varkappa+\tfrac{3}{4}\varkappa^2-\tfrac{15}{32}\varkappa^3-\cdots\}.$$

Mit wachsender Zeit nimmt die Geschwindigkeit wie die Amplitude in geometrischer Progression ab. Die auf einander folgenden Amplituden der Scheibe bilden eine geometrische Reihe, deren Basis e und deren Exponent

$$\varepsilon = (a^2-b^2)T = \frac{a^2-b^2}{2ab}\pi$$

ist oder in entwickelter Form

$$(46.)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \pi\varkappa\{1-\varkappa+\frac{3}{4}\varkappa^2-\varkappa^3+\cdots\} \\ \varkappa = \sqrt{2}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi\varrho R^4}{4\mathrm{M}}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\tau}}}. \end{cases}$$

Dieser Exponent ist also angenähert proportional der Quadratwurzel aus dem Reibungscoefficienten, ferner angenährt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit und endlich der vierten Potenz des Radius der Scheibe. Dies letztere Gesetz wurde bereits von *Coulomb* experimentell nachgewiesen.

Die Bestimmung von ε liefert ein bequemes Mittel zur Berechnung des Reibungscoefficienten η. Man erhält durch Umkehrung der Reihe

$$(47.)\qquad \varkappa = \frac{\pi\varrho R^4}{4\mathrm{M}}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\tau}}} = \frac{\varepsilon}{\pi}+\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2+\tfrac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^3+\tfrac{9}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^4+\cdots$$

Ausserdem kann η bestimmt werden aus der Aenderung der Schwingungszeit der Scheibe in Folge der Reibung. Ohne Reibung ist diese Zeit

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\tau}}.$$

Man erhält durch Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (43.)

$$(48.)\qquad \frac{T-T_0}{T_0} = \varkappa+\varkappa^2-\tfrac{3}{4}\varkappa^3+\cdots$$

Die Schwingungsdauer der Scheibe wird also durch die Reibung vermehrt, und zwar ist diese Vermehrung wieder angenähert proportional der Quadratwurzel aus Reibungsconstante und Dichtigkeit der Flüssigkeit sowie der vierten Potenz des Radius der Scheibe. Man findet durch Umkehrung der Reihe zur Berechnung von η

$$(49.)\qquad \varkappa = \frac{\pi\varrho R^4}{4M}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}}\sqrt{\frac{M}{\tau}} = \frac{T-T_0}{T_0}-\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2+\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^3-\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^4+\cdots$$

Diese Methode zur Bestimmung von η ist freilich keiner grossen Genauigkeit fähig, da T wegen des raschen Aufhörens der Bewegung nicht sicher genug beobachtet werden kann. Doch liefert die Verbindung der Gleichung (49.) mit der Gleichung (47.) die zur Controlle der Theorie sehr schätzbare Relation

$$(50.)\ \frac{\varepsilon}{\pi}+\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2+\tfrac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^3+\tfrac{9}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^4+\cdots = \frac{T-T_0}{T_0}-\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2+\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^3-\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^4+\cdots$$

zwischen dem Exponenten der geometrischen Reihe der Amplituden und der Vermehrung der Schwingungsdauer durch die Reibung, also zwischen Grössen, die sich direct beobachten lassen.

Es sei mir erlaubt, hier einige Beobachtungen *) folgen zu lassen, welche geeignet sind, den Grad der Uebereinstimmung der hier entwickelten Theorie mit wirklich angestellten Versuchen zu zeigen.

Vorher muss ich noch auf einige Aenderungen aufmerksam machen, welche mit den entwickelten Formeln vorzunehmen sind, bevor sie praktisch angewandt werden können. Es sind nämlich zwei Umstände, welche die Reinheit des Experiments beeinträchtigen, nicht zu vermeiden. Die Scheibe muss eine gewisse Dicke haben und sie muss durch einen cylindrischen festen Stab mit der zweiten Scheibe in Verbindung stehen, welche ausserhalb der Flüssigkeit sich befindet, und vermöge einer Kreistheilung, die sie trägt, zur Ablesung der Amplituden dient. An beiden Theilen, am Rande der Scheibe wie an jenem Stabe, findet ebenfalls Reibung statt. Es handelt sich darum, diese

*) Ausführlicher finden sich dieselben in der Abhandlung in *Poggendorffs* Annalen mitgetheilt, welche die experimentellen Resultate meiner Untersuchung enthält (Bd. 113).

zweierlei Störungen durch zweckmässige Näherungs-Rechnungen zu beseitigen.

Die Reibung, welche durch den Stab hervorgebracht wird, lässt sich auf einfache Weise eliminiren. Bei dem von mir angewandten Apparate trug der Stab an seinem unteren Ende zwei kleine Scheiben, welche, indem sie gegen einander gepresst wurden, der grösseren, zur Messung der Reibung bestimmten, zwischen beiden kleinen befindlichen Scheibe als Stütze dienten. Ich stellte nun die Beobachtung so an, dass ich einmal Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement der Amplituden bestimmte, wenn der Apparat nur jene beiden kleinen Scheiben trug, und zweitens, wenn zwischen diesen eine grössere Scheibe sich befand. Indem ich nun die beiden auf diese Weise beobachteten logarithmischen Decremente von einander abzog, erhielt ich in der Differenz denjenigen Theil des Exponenten der geometrischen Reihe der Amplituden, der von der Reibung am freien Theile der eingeklemmten Scheibe herrührte. Auf diese Differenz habe ich erst die entwickelten Gleichungen anzuwenden. So erhalte ich statt der Gleichung (47.)

$$\varkappa-\varkappa_1 = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}-\frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{\pi}-\frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)^2+\tfrac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}-\frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)^3+\tfrac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}-\frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)^4+\cdots,$$

$$\varkappa=\frac{\pi\varrho R^4}{4M}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}}\sqrt{\frac{M}{\tau}}; \qquad \varkappa_1=\frac{\pi\varrho R_1^4}{4M_1}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}}\sqrt{\frac{M_1}{\tau}},$$

wo die mit dem Index 1 versehenen Grössen sich auf den nur mit den beiden kleinen zum Tragen der grösseren dienenden Scheiben belasteten Apparat beziehen. Hierfür kann ich schreiben, indem ich die Schwingungsdauer des Apparats in beiden Anordnungen ausserhalb der Flüssigkeit

$$T_0=\pi\sqrt{\frac{M}{\tau}}; \qquad T_0'=\pi\sqrt{\frac{M_1}{\tau}}$$

einführe,

$$\text{Const.}=\frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\eta\varrho}}{\tau}=\frac{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}}{\frac{R^4}{T_0\sqrt{T_0}}-\frac{R_1^4}{T_0'\sqrt{T_0'}}}\left\{1+\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}\right)+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}\right)^2+\cdots\right\}$$

oder wegen der Kleinheit von R_1 mit genügender Annäherung

$$(51.)\quad \text{Const.}=\frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\eta\varrho}}{\tau}=\frac{\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}T_0\sqrt{T_0}}{R^4-R_1^4}\left\{1+\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}\right)+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\pi}\right)^2+\cdots\right\}.$$

Indem ich ferner in Gleichung (50.) statt der Schwingungsdauer T_0 im luftleeren Raume den in der Luft beobachteten Werth setze und demgemäss

statt ε schreibe $\varepsilon-\varepsilon_0$, wo ε_0 das logarithmische Decrement der Schwingungen in der Luft bezeichnet, erhalte ich

$$(52.)\quad \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\pi}\left\{1+\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\pi}\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\pi}\right)^2+\cdots\right\} = \frac{T-T_0}{T_0}\left\{1-\frac{T-T_0}{T_0}+\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Aus diesen verbesserten Gleichungen ist der Einfluss der unvollkommnen Elasticität des Aufhängungsdrathes und der dadurch hervorgerufenen Verzögerung der Bewegung so gut wie vollständig eliminirt.

Eine zweite Aenderung erfährt die Gleichung (51.) durch Berücksichtigung der Dicke der Scheibe. Den Einfluss derselben zu schätzen, führe ich eine kleine Rechnung aus.

Ich erhalte nach dem am Eingange des §. 5 zur Motivirung der eingeführten Vernachlässigungen Gesagten eine brauchbare Annäherung an die Wirklichkeit, wenn ich folgende Voraussetzungen mache. Durch Verlängerung der drei Flächen der Scheibe, der beiden Ebenen nämlich und des cylindrischen Randes, theile ich mir das flüssige Medium in fünf Theile, zwei volle Cylinder und drei cylindrische Ringe. Ich setze nun, wie es bisher geschehen ist, voraus, dass in den beiden vollen Cylindern, also über und unter der Scheibe, die Winkelgeschwindigkeit nur von der Entfernung x von der Fläche der Scheibe abhängt; und füge hinzu, dass im mittleren cylindrischen Ringe, also für die in gleicher Höhe mit der Scheibe befindliche Flüssigkeit die Winkelgeschwindigkeit nur von der Entfernung von der Axe r abhängt: über die beiden anderen Räume mache ich keine Annahme. Die beiden gemachten Annahmen sind um so richtiger, je näher das betrachtete Theilchen der Scheibe liegt; bei der Berechnung der Bewegung der Scheibe selber werde ich also den geringsten Fehler machen.

Nenne ich die Winkelgeschwindigkeit in dem in gleichem Niveau mit der Scheibe liegenden Raume ψ_4, so hängt diese Grösse nach der gemachten Voraussetzung von der Differentialgleichung

$$\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial\psi_4}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi_4}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi_4}{\partial r}$$

ab, zu der die Grenzbedingungen hinzutreten, dass für $r=R$

$$\psi_4 = \psi_1$$

und für einen unendlich grossen Werth von $r=r_4$

$$\psi_4 = 0$$

werde. Die Differentialgleichung der Bewegung der Scheibe (Gleichung (5.) §. 5)

nimmt die vollständigere Form

$$M\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\eta R^4\left\{\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right)_{x=0} + 4\frac{\delta}{R}\left(\frac{\partial\psi_4}{\partial r}\right)_{r=R}\right\}$$

an, wo δ die Dicke der Scheibe bezeichnet.

Da in der Differentialgleichung der Flüssigkeitsbewegung r immer grösser als R ist, so vernachlässige ich

$$\frac{3}{r}\frac{\partial\psi_4}{\partial r} \text{ gegen } \frac{\partial^2\psi_4}{\partial r^2};$$

ich setze demnach

$$\psi_4 = C\frac{\sin\left(m\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}(r_4-r)\right)}{\sin\left(m\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}(r_4-R)\right)}e^{-m^2 t}$$

und begehe dabei einen Fehler von der Ordnung

$$\frac{3}{mR}\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}.$$

Zur Bestimmung von m erhalte ich jetzt statt der Gleichung (10.) §. 6

$$0 = m^4+\alpha^4-2\beta m^3\left\{\operatorname{ctg} mc+\operatorname{ctg} mc'+4\frac{\delta}{R}\operatorname{ctg} m\sqrt{\frac{\varrho}{\eta}}(r_4-R)\right\}$$

und für $c=c'=\infty$ und $r^4=\infty$, sowie $m=a\pm bi$, entsprechend der Gleichung (6.) §. 7,

$$0 = (a\pm bi)^4 \pm 4i\beta\left(1+2\frac{\delta}{R}\right)(a\pm bi)^3+\alpha^4.$$

In den Werthen von a und b, sowie des logarithmischen Decrements und der Schwingungszeit wird also nichts weiter geändert, als dass statt R^4 zu schreiben ist $R^4+2R^3\delta$ oder mit Vernachlässigung von δ^2 gegen R^2

$$\left(R+\frac{\delta}{2}\right)^4;$$

d. h. der Halbmesser der Scheibe ist um die halbe Dicke derselben zu vergrössern. Hierbei ist nach dem obigen ein Fehler von der Ordnung

$$4\frac{\delta}{R}\cdot\frac{3}{mR}\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}} = \frac{12\delta}{mR^2}\sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$$

oder von der Ordnung

$$12\frac{\delta}{R^2}\sqrt{\frac{2\eta}{\varrho}\frac{T_0}{\pi}}$$

begangen. Diese Grösse ist jedenfalls bei meinen Versuchen immer zu vernachlässigen. Sie beträgt z. B. für Wasser und meine kleinste Scheibe nicht mehr als einige Tausendtheile.

Hiernach erfährt durch Berücksichtigung der Dicke der Scheibe die Gleichung (51.) nur die Aenderung, dass in derselben $R^4+2R^3\delta$ statt R^4 und $R_1^4+2R_1^3\delta_1$ statt R_1^4 zu schreiben ist. Diese so geänderte Gleichung und die Gleichung (52.) wende ich auf meine Beobachtungen an.

Die Resultate dieser Beobachtungen, die ich mit vier verschiedenen Scheiben aus verschiedenen Stoffen in Luft und destillirtem Wasser angestellt habe, sind in folgender Tabelle enthalten. Jede Zahl dieser Tabelle ist aus einer oder mehreren Reihen von Beobachtungen, deren Zahl ich beigefügt habe, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die logarithmischen Decremente sind nicht auf natürliche sondern briggische Logarithmen bezogen, also mit dem Modul 2,3025... zu multipliciren.

	Durchmesser der Scheibe in pariser Linien. $2R$	Dicke der Scheibe in pariser Linien. δ	Temperatur der Luft.	Schwingungszeit in der Luft T_0 in Secunden.	Logarithmisches Decrement in der Luft $\frac{\varepsilon_0}{2,3025...}$	Anzahl der Beobachtungen.	Temperatur der Luft.	Temperatur des Wassers.	Schwingungszeit im Wasser T in Secunden.	Anzahl der Beobachtungen.	Temperatur der Luft.	Temperatur des Wassers.	Logarithmisches Decrement im Wasser $\frac{\varepsilon}{2,3025...}$	Anzahl der Beobachtungen.
	'''	'''	°	"			°	°	"		°	°		
Glasscheibe	51,68	1,27	16,8c	7,9026	0,000723	30	16,9c	16,0c	8,0264	10	17,3c	16,1c	0,02532	39
Kleinere Messingscheibe	49,57	0,60	16,9	8,0272	0,000935	16	16,4	15,1	8,1333	9	16,4	15,1	0,02078	38
Grössere -	69,79	0,56	16,5	9,2252	0,000837	28	17,4	14,9	9,6192	16	17,4	14,9	0,05995	33
Weissblechscheibe	95,31	0,22	17,3	9,4220	0,001690	15	18,1	14,0	11,05	10	15,8	13,95	0,17916	20
Ohne Scheibe	21,68	0,58	18,0	7,5370	0,000608	32	21,55	17,3	7,5471	13	21,55	17,3	0,00166	13
Weissblechscheibe	95,31	0,22	21,5	9,4450	0,001624	16	21,2	18,7	10,913	11	21,2	18,7	0,16951	11
Grössere Messingscheibe	69,79	0,56	18,55	9,2323	0,000828	26	20,1	16,85	9,6680	13	20,1	16,85	0,05891	17
Kleinere -	49,57	0,60	20,15	8,0284	0,000673	26	17,8	14,85	8,1368	18	17,5	14,85	0,02097	38
Glasscheibe	51,68	1,27	18,6	7,9113	0,000711	28	18,9	15,9	8,0407	18	18,9	15,9	0,02544	38

Die in dieser Tabelle in der mittleren Horizontalreihe unter der Rubrik „ohne Scheibe" aufgeführten Zahlen sind die numerischen Werthe der in den vorhergehenden Formeln durch Indices unterschiedenen Grössen $2R_1$, δ_1, T_0' u. s. w.

Hieraus erhalte ich durch lineare Interpolation für die Temperatur des Wassers von 15°,5 C

	Temp. der Luft	$\frac{\varepsilon}{2,3025}$	$\frac{\varepsilon_0}{2,3025}$	$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2,3025}$	Temp. der Luft	T	T_0	$T-T_0$
Ohne Scheibe	17°,6	0,00166	0,00061	0,00105	20°	7",5471	7",5370	0",0101
Kleine Messingscheibe	17,0	0,02065	0,00093	0,01972	17,0	8,1277	8,0273	0,1004
Glasscheibe	18,1	0,02567	0,00071	0,02496	17,9	8,0979	7,9079	0,1900
Grosse Messingscheibe	18,7	0,05963	0,00083	0,05880	18,7	9,6344	9,2329	0,4015
Weissblechscheibe	18,5	0,17601	0,00167	0,17434	19,1	11,00	9,4318	1,57

Aus den angegebenen Zahlen finde ich als Werth der durch Gleichung (51.) bestimmten Constante, bezogen auf Centimeter und Secunden als Einheiten,

für die	kleine Messingscheibe	0,0003258,
- -	Glasscheibe	0,0003243,
- -	grosse Messingscheibe	0,0003175,
- -	Weissblechscheibe	0,0003180.

Diese Zahlen stimmen zwar nicht vollständig unter einander überein, sie unterscheiden sich aber um weniger als $\frac{1}{40}$ ihres absoluten Werthes. Vergegenwärtigen wir uns die angenäherten Voraussetzungen der Theorie, so zeigt sich, dass der Werth der in Rede stehenden Constante um so grösser ausfallen muss, je kleiner der Radius der angewandten Scheibe ist. Denn es wurde im Eingange erörtert, dass die Constante η um so grösser ausfällt, je kleiner die Scheibe ist. Die Richtigkeit dieses Raisonnements wird durch die angeführten Zahlen bestätigt. Dieselben nähern sich einer gewissen Grenze, die bei den beiden grösseren Scheiben so nahe erreicht zu sein scheint, dass die Abweichungen von der Ordnung der Beobachtungsfehler sind.

Man kann hiernach die angestellten Beobachtungen als eine gute Bestätigung der Theorie, mithin als einen Beweis für die Richtigkeit der *Newton*schen Hypothese ansehen, nach welcher die Reibung zweier Flüssigkeitsschichten proportional dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten ist. Man kann weiter aus ihnen schliessen, dass die von mir benutzte *Coulomb*sche Methode geeignet ist, die Werthe der Reibungsconstanten von Flüssigkeiten mit einer solchen Genauigkeit zu bestimmen, wie sie in der Regel bei physikalischen Constanten ähnlicher Art nicht besser erreicht wird.

Als Werth der Constante der inneren Reibung des Wassers bei 15°,5 C. erhält man aus den obigen Beobachtungen

$$\eta = 0{,}0132,$$

bezogen auf Centimeter und Secunden. Die Bedeutung dieser Zahl ist darnach folgende. Bewegt sich Wasser in horizontalen Schichten, und ist die Geschwindigkeit v einer Schicht in der verticalen Höhe x über dem Boden eine solche lineare Function von x, dass der Coefficient von x die Einheit ist; ist also

$$v = v_0 + \frac{x}{1''},$$

so ist die von einer Schicht auf die benachbarte auf der Fläche eines Quadrat-

centimeters in einer Secunde ausgeübte Reibung gleich

0,0132 Gramm.

Eine weniger gute Uebereinstimmung zeigen die Beobachtungen mit dem durch Gleichung (52.) dargestellten Gesetze. Ich finde als Werthe der

	linken Seite		rechten Seite dieser Gleichung
bei dem Apparate ohne Scheibe	0,0008	...	0,0013,
- der kleineren Messingscheibe	0,0147	...	0,0124,
- - Glasscheibe	0,0186	...	0,0235,
- - grösseren Messingscheibe	0,0451	...	0,0417,
- - Weissblechscheibe	0,1473	...	0,144.

Indess zeigen beide Zahlenreihen im Ganzen dasselbe Gesetz; und mehr ist bei der Unsicherheit der Bestimmung der Differenz $T - T_0$, die namentlich aus der Veränderlichkeit der Schwingungszeiten entsteht, nicht zu erwarten.

Ich habe zweitens dieselben Beobachtungen benutzt, die Gesetze der Reibung der atmosphärischen Luft zu untersuchen. Durch Reduction der in der Luft angestellten Beobachtungen auf 18°C erhalte ich folgende Zahlen. Ich füge zugleich den Werth des Trägheitsmoments M in Centimetern bei.

	T_0	$\frac{\varepsilon_0}{2,3025}$	M
Ohne Scheibe	7,5370	0,000608	12890
Kleine Messingscheibe	8,0276	0,000846	14630
Glasscheibe	7,9084	0.000715	14210
Grössere Messingscheibe	9,2304	0,000830	19300
Weissblechscheibe	9,4258	0,001679	20140

Die angegebenen Exponenten ε_0 bestehen aus drei Theilen, von denen der erste von dem Widerstande des Aufhängungsdrathes, der zweite von der Reibung der Luft an der angewandten Scheibe und der dritte von der Reibung derselben an der getheilten Scheibe herrührt. Mache ich über den Widerstand des Draths die Voraussetzung, er sei proportional der Winkelgeschwindigkeit des Apparats, so erhalte ich mit Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung für ε_0 den Werth

$$(53.) \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{M}T_0 + \frac{\pi(R^4+2R^3\delta+R_0^4+2R_0^3\delta_0)}{4M}\sqrt{2\pi\eta_0\varrho_0 T_0}.$$

Hierin bezeichnet α die Widerstandsconstante des Drathes, R_0 und δ_0 Radius

und Dicke der getheilten Scheibe, η_0 und ϱ_0 Reibungsconstante und Dichtigkeit der Luft. Bei meinen Versuchen war

$$2R_0 = 69''',60 \text{ par.}, \quad \delta_0 = 0''',58 \text{ par. Mass.}$$

Hiernach berechne ich aus den Zahlen obiger Tabelle die beiden Constanten α und $\sqrt{\eta_0 \varrho_0}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ich finde, ebenfalls in Centimetern,

$$\alpha = 1,369,$$
$$\sqrt{\eta_0 \varrho_0} = 0,0006772,$$

und setze ich die Dichtigkeit des Wassers gleich der Einheit und daher

$$770 \varrho_0 = 1,$$

so folgt

$$\eta_0 = 0,000353,$$

so dass die Reibung des Wassers nur etwa 35 mal so gross ist wie die der Luft.

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe in die Formel (53.) erhalte ich eine sehr erfreuliche Uebereinstimmung. Ich erhalte folgende berechnete Werthe von $\frac{\varepsilon_0}{2,3025}$, denen ich die beobachteten zur bequemen Vergleichung zur Seite stelle.

	Berechnet.	Beobachtet.	Differenz.
Ohne Scheibe	0,000662 ...	0,000608 ...	+0,000054
Kleine Messingscheibe	0,000718 ...	0,000846 ...	−0,000128
Glasscheibe	0,000760 ...	0,000715 ...	+0,000045
Grosse Messingscheibe	0,000861 ...	0,000830 ...	+0,000031
Weissblechscheibe	0,001676 ...	0,001679 ...	−0,000003.

Aus dieser überraschenden Uebereinstimmung geht hervor, dass die Voraussetzungen der Theorie bei Schwingungen in der Luft weit besser erfüllt sind als bei der Bewegung im Wasser. Dies hat einfach seinen Grund darin, dass die Theorie die Voraussetzung enthält, dass η eine kleine Grösse sein solle; eine Voraussetzung, die bei der Luft besser erfüllt ist als beim Wasser.

Ich habe stillschweigend hier die für incompressible Flüssigkeiten entwickelten Gleichungen auf die Luft übertragen. Ich habe also die in Folge der Centrifugalkraft eintretenden Verdünnungen und Verdichtungen vernachlässigt. Dass bei den langsamen Schwingungen meines Apparats diese Voraussetzung zu machen erlaubt ist, beweisen die obigen Zahlen.

Ein Punkt verdient noch hervorgehoben zu werden. Die Beobachtungen zeigen, dass der Stoff der Scheibe ohne Einfluss auf die Reibung ist.

Ich hatte also Recht, $E = \infty$ zu setzen oder anzunehmen, dass die Flüssigkeit fest an der Scheibe haftet. Im folgenden §. werde ich ein Experiment behandeln, bei dem dies nicht erfüllt ist.

Integration für den Fall zweier Flüssigkeiten. Mittel zur Bestimmung der äusseren Reibung *).

§. 8.

Mit demselben Grade der Annäherung, wie die Rechnung des vorigen §., lässt sich die allgemeinere Aufgabe lösen, bei der die Reibung E der Flüssigkeit an der Scheibe nicht ∞ ist. Es kann dabei zugleich noch die Flüssigkeit über und unter der Scheibe als verschieden vorausgesetzt werden. Doch führt dies allgemeinere Problem zu so complicirten Endformeln, dass ich vorgezogen habe, den speciellen Fall des vorigen §. vollständig durchzuführen und die Behandlung der jetzt vorliegenden allgemeineren Aufgabe nur anzudeuten. Die vollständige Analogie mit dem Früheren führt fast ohne Rechnung zu angenäherten Formeln, die für die Beobachtung zu verwenden sind.

Das Interesse dieser Aufgabe gründet sich auf ein Experiment, das die Bestimmung der gegenseitigen Reibung zweier Flüssigkeiten zum Zweck hat. Bei diesem Experimente befindet sich die Scheibe unmittelbar über oder unter der Grenzfläche zweier über einander gelagerten Flüssigkeiten, doch so, dass sie ganz in einer der beiden Flüssigkeiten schwingt. Auf die Scheibe wirkt also auf der einen Seite die Reibung der sie umgebenden Flüssigkeit, auf der anderen die Reibung der dünnen Schicht derselben Flüssigkeit, die sich zwischen der Scheibe und der Grenze befindet, und die gegenseitige Reibung beider Flüssigkeiten. Ist jene Schicht zwischen der Scheibe und der Grenze sehr dünn, und wird zugleich die Scheibe von dieser Flüssigkeit benetzt, so kann angenommen werden, dass die Schicht überall die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe habe. Es fällt also dann das Problem mit dem erstgenannten zusammen, wenn nur in den Formeln für die eine Fläche der Scheibe $E = \infty$ gesetzt wird.

---

*) Die beiden folgenden Paragraphen bilden den Inhalt meiner Dissertation: de mutua duorum fluidorum frictione. Regimonti Prussorum. 1860.

Nach §. 5 habe ich auszugehen von den Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \frac{\varrho_2}{\eta_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}; \qquad \frac{\varrho_3}{\eta_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2},$$

$$(2.)\quad \mathrm{M}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\tau\varphi_1 + \frac{\pi}{2}R^4\left\{\eta_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \eta_3\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right\}_{x=0}.$$

zu denen die Bedingungen hinzutreten, dass

$$(3.)\quad \text{für } x=0 \quad 0 = E_2(\psi_1-\psi_2)+\eta_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}; \qquad 0 = E_3(\psi_1-\psi_3)+\eta_3\frac{\partial\psi_3}{\partial x},$$

$$(4.)\quad \begin{cases} - \; x = c_2 \quad 0 = \psi_2, \\ - \; x = c_3 \qquad\qquad\qquad 0 = \psi_3, \end{cases}$$

werde, und endlich, dass

$$(5.)\quad \text{für } t=0 \quad \varphi_1 = \Phi, \quad \psi_1 = \Psi_1, \quad \psi_2 = \Psi_2, \quad \psi_3 = \Psi_3$$

sein solle. Die Bezeichnung ist der bisherigen ganz gleich. Die Constanten der beiden Flüssigkeiten sind durch die Indices 2 und 3 unterschieden. Die Anwendung auf das genannte Experiment wird erhalten, wenn E_2 oder $E_3 = \infty$ gesetzt wird.

Diese Gleichungen vereinfache ich durch ähnliche Substitutionen, wie zu Anfang des §. 6 eingeführt wurden. Zunächst ersetze ich die Coordinate x durch eine neue Variabele, und zwar auf doppelte Weise. Bezeichnet nämlich x die Entfernung eines Theilchens der durch den Index 2 unterschiedenen Flüssigkeit, so setze ich

$$(6^a.)\quad x = y_2\sqrt{\frac{\eta_2}{\varrho_2}};$$

bezieht es sich auf eine Stelle der anderen Flüssigkeit, so substituire ich

$$(6^b.)\quad x = y_3\sqrt{\frac{\eta_3}{\varrho_3}}.$$

In der Regel werde ich indess, da kein Missverständniss daraus entstehen kann, die Unterscheidung der beiden y dnrch Indices unterlassen und einfach y schreiben. Ich setze ferner

$$(7.)\quad c_2 = c\sqrt{\frac{\eta_2}{\varrho_2}} \text{ und } c_3 = c'\sqrt{\frac{\eta_3}{\varrho_3}},$$

ausserdem wie früher

$$(8.^a)\quad \alpha^4 = \frac{\tau}{\mathrm{M}}; \qquad \beta_2 = \frac{\pi R^4\sqrt{\eta_2\varrho_2}}{4\mathrm{M}}; \qquad \beta_3 = \frac{\pi R^4\sqrt{\eta_3\varrho_3}}{4\mathrm{M}},$$

und endlich

$$(8^b.)\quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\eta_2\varrho_2}}{E_2}; \qquad \zeta_3 = \frac{\sqrt{\eta_3\varrho_3}}{E_3}.$$

Durch diese Substitutionen erhalte ich statt der Gleichungen (1.) und (2.) die einfacheren

$$(9.)\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}; \qquad \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2},$$

$$(10.)\quad \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -\alpha^4 \varphi_1 + 2\left\{\beta_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \beta_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right\}_{y=0},$$

und es werden die Grenzbedingungen

$$(11.)\quad \begin{cases} \text{für } y=0 & 0 = \psi_1 - \psi_2 + \zeta_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}; \quad 0 = \psi_1 - \psi_3 + \zeta_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial y}, \\ \text{-}\ \ y = c & 0 = \psi_2, \\ \text{-}\ \ y = c' & \qquad\qquad 0 = \psi_3 \end{cases}$$

und endlich

$$(12.)\quad \text{für } t=0 \quad \varphi_1 = \Phi; \quad \psi_1 = \Psi_1; \quad \psi_2 = \Psi_2(y); \quad \psi_3 = \Psi_3(y).$$

Ich integrire die Gleichungen durch dieselben particularen Integrale wie früher, indem ich setze

$$(13.)\quad \begin{cases} \Psi_1 = Ce^{-m^2 t}; \qquad \varphi_1 = -\frac{C}{m^2} e^{-m^2 t}, \\ \Psi_2 = \{A_2 \sin my + B_2 \cos my\} e^{-m^2 t}, \\ \Psi_3 = \{A_3 \sin my + B_3 \cos my\} e^{-m^2 t}, \end{cases}$$

und zwar nehme ich sogleich an, dass die Constante m für alle Functionen dieselbe sei, da den Grenzbedingungen für jeden Werth von t genügt werden soll.

Die Grenzbedingungen (10.) und (11.) werden wieder durch ein doppeltes System von particularen Integralen erfüllt, von denen das eine die der Scheibe und den Flüssigkeiten gemeinschaftliche, das andere die den Flüssigkeiten allein zukommende Bewegung darstellt. Verstehe ich unter m eine Wurzel der Gleichung

$$(14.)\quad 0 = m^4 + \alpha^4 - 2m^3 \left\{\beta_2 \frac{\cos mc}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc} + \beta_3 \frac{\cos mc'}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'}\right\},$$

ferner unter n eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen

$$(15.)\quad \operatorname{tg} nc = -n\zeta_2, \qquad \operatorname{tg} nc' = -n\zeta_3,$$

so sind die vollständigen Werthe der Functionen

$$(16.)\quad \begin{cases} \psi_1 = \Sigma_m C_m e^{-m^2 t}, \qquad \varphi_1 = -\Sigma_m \frac{C_m}{m^2} e^{-m^2 t}, \\ \psi_2 = \Sigma_m C_m P^m(y) e^{-m^2 t} + \frac{1}{\beta_2} \Sigma_n B_n Q^n(y) e^{-n^2 t}, \\ \psi_3 = \Sigma_m C_m P_{\prime}^m(y) e^{-m^2 t} - \frac{1}{\beta_3} \Sigma_n B_n Q_{\prime}^n(y) e^{-n^2 t}. \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$(17.)\quad \begin{cases} P^m(y) = \dfrac{\sin m(c-y)}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc}, & Q^n(y) = \sin ny + n\zeta_2 \cos ny. \\[2ex] P_1^m(y) = \dfrac{\sin m(c'-y)}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'}, & Q_1^n(y) = \sin ny + n\zeta_3 \cos ny, \end{cases}$$

und es bezeichnet Σ_m eine Summirung nach allen Werthen von m^2, Σ_n eine solche nach allen Werthen von n^2.

Die in den Gleichungen (16.) noch vorkommenden, von m, respective n abhangenden Constanten C_m und B_n können durch die Gleichungen (12.) fast ebenso bestimmt werden wie im oben behandelten specielleren Probleme in §. 6. Durch Einsetzen der gefundenen Functionen aus den Formeln (16.) in die Gleichungen (12.) erhalte ich

$$(18.)\quad \begin{cases} \Psi_1 = \Sigma_m C_m, \qquad \Phi = -\Sigma_m \dfrac{C_m}{m^2}. \\[1ex] \Psi_2(y) = \Sigma_m C_m P^m(y) + \dfrac{1}{\beta_2} \Sigma_n B_n Q^n(y). \\[1ex] \Psi_3(y) = \Sigma C_m P_1^m(y) - \dfrac{1}{\beta_3} \Sigma B_n Q_1^n(y), \end{cases}$$

und hieraus finde ich vermöge der Bedeutung von m und n als Wurzeln der Gleichungen (14.) und (15.)

$$(19.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2} B_n \left\{ \dfrac{c(1+n^2\zeta_2^2)+\zeta_2}{\beta_2} + \dfrac{c'(1+n^2\zeta_3^2)+\zeta_3}{\beta_3} \right\} \\[1ex] \qquad = \int_0^c \Psi_2(y) Q^n(y)\,dy - \int_0^{c'} \Psi_3(y) Q_1^n(y)\,dy, \\[1ex] \tfrac{1}{2} C_m \left\{ 1 - 3\dfrac{\alpha^4}{m^4} + 2\beta_2 p + 2\beta_3 p' \right\} \\[1ex] \qquad = \Psi_1 + \dfrac{\alpha^4}{m^4}\Phi + 2\beta_2 \int_0^c \Psi_2(y) P^m(y)\,dy + 2\beta_3 \int_0^{c'} \Psi_3(y) P_1^m(y)\,dy, \end{cases}$$

wenn ich bezeichne

$$(20.)\quad p = \frac{c + \zeta_2 \cos^2 mc}{(\sin mc + m\zeta_2 \cos mc)^2}, \qquad p' = \frac{c' + \zeta_3 \cos mc'}{(\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc')^2}.$$

Damit sind alle Constanten bestimmt, sowie sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Man überzeugt sich leicht, dass die in §. 6 entwickelten Formeln nur einen speciellen Fall der hier abgeleiteten enthalten. Es ist ferner einfach nachzuweisen, dass den Gleichungen (14.) und (15.) dieselben bemerkens-

werthen Eigenschaften zukommen, wie den speciellen Gleichungen (10.) und (9.) des §. 6.

Zunächst ist die Summe der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (14.) und der der Wurzeln der Gleichungen (15.), denen bekanntlich kein imaginäres n genügt, unabhängig von den Werthen der in diesen Gleichungen vorkommenden Parameter c, c', β_2, β_3, ζ_2 und ζ_3. Der Beweis lässt sich, wie früher §. 6, auf geometrischem Wege führen. Construirt man die Curven, deren Ordinaten

$$(21.)\quad \begin{cases} z_1 = \beta_2 \dfrac{\cos mc}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc} + \beta_3 \dfrac{\cos mc'}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'}, \\ \text{und} \\ z_2 = \dfrac{m^4 + \alpha^4}{2m^3} \end{cases}$$

sind, für alle positiven reellen Werthe der Abscisse m, so erhält man in den Abscissen der Durchschnittspunkte beider Curven die sämmtlichen positiven reellen Wurzeln der Gleichung (14.), von denen die negativen nur durch das Vorzeichen unterschieden sind. Die Curve z_1 besteht aus einem unbegrenzten Systeme von Curvenzweigen, in deren jedem mit wachsender Abscisse m die Ordinate z_1 continuirlich von $+\infty$ bis $-\infty$ herabsinkt. Dagegen hat die Ordinate z_2 der anderen Curve nur positive Werthe, sie wird ∞ für $m=0$ und $m=\infty$ und erreicht ein Minimum für $m=\alpha\sqrt[4]{3}$, wo sie den Werth $z_2 = \frac{2}{3}\alpha\sqrt[4]{3}$ annimmt. Folglich tritt ein Durchschnitt beider Curven immer zwischen einem Werthe von m, der $z_1=\infty$ macht, und dem nächstfolgenden ein, durch welchen $z_1=-\infty$ wird. Die Curven haben demnach soviel Durchschnittspunkte, als es Werthe von m giebt, welche $z_1=\infty$ machen. Diese Grösse z_1 wird aber so oft ∞, als einer der Nenner der beiden Glieder der ersten Gleichung (21.) verschwindet. Verschwinden durch besondere Werthe der Parameter beide gleichzeitig, so fallen zwei Wurzeln der Gleichung (14.) zusammen. Der Werth von m aber, bei dem beide Nenner verschwinden, erfüllt die Gleichungen (15.). Diese Gleichungen haben demnach eine gemeinschaftliche Wurzel immer dann, wenn zwei der Wurzeln der Gleichung (14.) gleich werden, und zwar ist dieselbe etwas kleiner als der gleiche Werth dieser Wurzeln der Gleichung (14.). Die Grösse der in den Gleichungen (14.) und (15.) vorkommenden Parameter hat also keinen Einfluss auf die Zahl ihrer reellen Wurzeln zusammengenommen.

Was die imaginären Wurzeln der Gleichung (14.) betrifft, so ist zunächst leicht einzusehen, dass sie keine rein imaginäre Wurzel besitzt. Denn setzt man in derselben

$$m = bi,$$

so erhält man die Gleichung

$$0 = b^4 + \alpha^4 + 2b^3 \left\{ \beta_2 \frac{e^{bc} + e^{-bc}}{e^{bc} - e^{-bc} + b\zeta_2(e^{bc} + e^{-bc})} + \beta_3 \frac{e^{bc'} + e^{-bc'}}{e^{bc'} - e^{-bc'} + b\zeta_3(e^{bc'} + e^{-bc'})} \right\},$$

welcher weder ein positives, noch ein negatives b genügen kann. Dagegen besitzt sie complex-imaginäre Wurzeln von den Formen

$$m = a + bi, \quad a - bi, \quad -a + bi, \quad -a - bi,$$

worin unter a und b positive reelle Grössen verstanden sind und, wie früher, $i = \sqrt{-1}$ ist. Diese Grössen haben, wie die früher ebenso bezeichneten, die Eigenschaften, dass

$$a > b$$

und dass

$$a^2 + b^2 < \alpha^2,$$

dass also auch

$$2ab < \alpha^2$$

ist. Dies folgt sofort aus folgenden mit Hülfe der Gleichung (14.) gefundenen Werthen bestimmter Integrale. Genügen m und m_1 dieser Gleichung, so ist

$$2\beta_2 \int_0^c \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc} \cdot \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c + m_1 \zeta_2 \cos m_1 c} dy$$

$$+ 2\beta_3 \int_0^{c'} \frac{\sin m(c'-y)}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'} \cdot \frac{\sin m_1(c'-y)}{\sin m_1 c' + m_1 \zeta_3 \cos m_1 c'} dy = \frac{\alpha^4}{m^2 m_1^2} - 1.$$

Setzt man hierin $m = a + bi$, $m_1 = a - bi$, welche Grössen beide der Gleichung (14.) genügen, wenn eine sie erfüllt, so wird die linke Seite dieser Gleichung zu einer Summe von Quadraten reeller Grössen, also positiv. Die rechte dagegen wird

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 1.$$

Es ist also nach der letzten Bemerkung

$$(22.) \quad \left(\frac{\alpha^2}{a^2 + b^2}\right)^2 - 1 > 0 \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 < \alpha^2$$

folglich auch, da a und b reell sind,

$$(23.) \quad 2ab < \alpha^2.$$

Dies heisst, wie sich weiter unten zeigen wird, *dass die Schwingungsdauer der Scheibe durch die Reibung vergrössert wird.*

Es ist ferner ebenso

$$2\beta_2\int_0^c \frac{\cos m(c-y)}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc}\cdot\frac{\cos m_1(c-y)}{\sin m_1 c + m_1\zeta_2\cos m_1 c}dy$$
$$+2\beta_3\int_0^{c'} \frac{\cos m(c'-y)}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'}\cdot\frac{\cos m_1(c'-y)}{\sin m_1 c' + m_1\zeta_3\cos m_1 c'}dy = \alpha^4\frac{m^2+m_1^2}{m^2 m_1^2}.$$

Wird hierin wieder $m = a+bi$, $m_1 = a-bi$ gesetzt, so wird die linke Seite als Summe von Quadraten positiv, während die rechte den Werth

$$2\alpha^4\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

annimmt. Zum Bestehen der Gleichung ist also erforderlich, dass

$$(24.)\quad a^2 > b^2 \quad\text{oder}\quad a > b$$

ist. Dies zeigt, wie ich ebenfalls später nachweisen werde, dass *die Amplituden der schwingenden Scheibe in Folge der Reibung mit wachsender Zeit abnehmen.*

Ist $\alpha = 0$, so folgt aus demselben Theoreme, dass für diesen Fall die Gleichung (15.) keine imaginäre Wurzel besitzt; und dies heisst, physikalisch gesprochen, dass *eine periodische Bewegung der Scheibe und der Flüssigkeit nur in Folge der Torsionskraft des Drathes, nicht der Reibung der Flüssigkeit entstehen kann.*

§. 9.

Diese im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln wende ich auf den speciellen Fall an, in welchem beide Flüssigkeiten unbegrenzt sind. Ich setze zu dem Ende

$$(1.)\quad c = c' = \infty.$$

Ich untersuche zunächst die Wurzeln der transcendenten Gleichungen. Die Gleichungen (15.) §. 8 liefern die Doppelgleichung

$$(2.)\quad \operatorname{tg} nc = -n\zeta_2 = -n\zeta_3,$$

der im Allgemeinen nur die Wurzel $n = 0$ genügt. Nur in dem Falle $\zeta_2 = \zeta_3$, also z. B., wenn beide Flüssigkeiten gleich sind oder wenn beide die Wand benetzen ($\zeta = 0$), besitzt sie ein unendliches System von reellen Wurzeln. Diese bilden für $c = \infty$ eine continuirlich von 0 bis ∞ wachsende Grösse, deren Differential

$$(3.)\quad dn = \frac{\pi}{c}$$

ist. Denn wenn der Gleichung (2.) die Wurzel n genügt, so genügt ihr ebenfalls die unendlich wenig grössere

$$n-dn = n-\frac{\pi}{c}.$$

Die zugehörige Constante B_n (Gleichung 19 §. 8) verschwindet wegen $n=0$ für den Fall, dass $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ von $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ verschieden ist. Sind beide gleich, so wird sie für $c=c'=\infty$ unendlich klein, und zwar wird nach Gleichung (3.)

$$(4.)\quad B_n(1-n^2\tfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2})\left(\frac{1}{\zeta_2}-\frac{1}{\zeta_1}\right) = \frac{2}{\pi}dn\int_0^\infty (\Psi_2(y)-\Psi_1(y))\,Q^n(y)\,dy.$$

Es reduciren sich also in diesem Falle die von sämmtlichen Wurzeln n abhängenden particularen Lösungen zu einem zwischen den Grenzen 0 und ∞ nach dn und dy auszuführenden Doppelintegrale.

Aehnlich verhält es sich mit den reellen Wurzeln der Gleichung (14.) §. 8. Dieselbe verwandelt sich für $c=c'$ in eine in Bezug auf $\operatorname{tg} mc$ quadratische Gleichung, der ich die Form

$$(5.)\quad 0 = \mathfrak{M}_1 \sin^2 mc - 2\mathfrak{M}_{11}\sin mc\cos mc - \mathfrak{M}_{111}\cos^2 mc$$

gebe, indem ich zur Abkürzung setze:

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_1 = m^4-c^4, \\ 2\mathfrak{M}_{11} = 2(\zeta_1-\zeta_2)m^3 - (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2})m(m^4-c^4), \\ \mathfrak{M}_{111} = 2(\zeta_1\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}-\zeta_2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1})m^4 - \frac{\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon_1\varepsilon_2}m^2(m^4-c^4). \end{cases}$$

Bezeichne ich ferner zur Abkürzung

$$(7.)\quad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_{11}^2 - \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_{111},$$

so zerfällt die Gleichung (5.) in die beiden Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} 0 = \mathfrak{M}_1\sin mc - (\mathfrak{M}_{11}-\mathfrak{M})\cos mc, \\ 0 = \mathfrak{M}_1\sin mc - (\mathfrak{M}_{11}-\mathfrak{M})\cos mc. \end{cases}$$

Sie hat also ein doppeltes System von Wurzeln, deren eines der ersten dieser beiden Gleichungen genügt, während das andere die zweite erfüllt: das erste hängt also in derselben Weise von der positiven Quadratwurzel aus $\mathfrak{M}^2$ ab, wie das zweite von der negativen. Für $c=\infty$ bilden die der Grösse nach auf einander folgenden reellen Wurzeln je eines dieser Systeme die Werthe einer continuirlich von 0 bis ∞ wachsenden Grösse, deren Differential beide Male

$$(9.)\quad dm = \frac{\pi}{c}$$

ist, und zwar aus demselben Grunde wie bei n.

Die zugehörige Constante C_m ist verschieden, je nachdem m der ersten oder zweiten Gleichung (8.) genügt. Beide Male aber wird sie unendlich klein. Erfüllt m die erste Gleichung (8.), so erhält man aus Gleichung (19.) §. 8 den gesuchten Grenzwerth von C_m durch Elimination von $\sin mc$ und $\cos mc$ durch diese Gleichung (8.) und von c durch die Gleichung (9.). Benutzt man noch die identische Gleichung

$$0 = 1 - 2m^3 \left\{ \frac{\beta_2}{\mathfrak{M}_{11} \pm \mathfrak{M} + m\zeta_2 \mathfrak{M}_1} + \frac{\beta_3}{\mathfrak{M}_{11} \pm \mathfrak{M} + m\zeta_3 \mathfrak{M}_1} \right\},$$

welche sich durch Anwendung der Gleichungen (8.) auf Gleichung (14.) §. 8 ergiebt, sowie die Relation

$$0 = 2\mathfrak{M}_{11} + m(\zeta_2 + \zeta_3)\mathfrak{M}_1 - 2(\beta_2 + \beta_3)m^3,$$

so erhält man das gesuchte C_m in der einfacheren Gestalt

$$(10.) \quad \begin{cases} C_m \dfrac{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_1^2 + (\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M})^2)}{(\beta_2 + \beta_3)(\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M}) + m(\beta_2\zeta_3 + \beta_3\zeta_2)\mathfrak{M}_1} \\ = \dfrac{2}{\pi} m^6 dm \left\{ \Psi_1 + \dfrac{\alpha^4}{m^2}\Phi + 2\beta_2 \displaystyle\int_0^\infty \Psi_2(y) \dfrac{(\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M})\cos my - \mathfrak{M}_1 \sin my}{\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M} + m\zeta_2 \mathfrak{M}_1} dy \right. \\ \qquad \left. + 2\beta_3 \displaystyle\int_0^\infty \Psi_3(y) \dfrac{(\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M})\cos my - \mathfrak{M}_1 \sin my}{\mathfrak{M}_{11} + \mathfrak{M} + m\zeta_3 \mathfrak{M}_1} dy \right\}. \end{cases}$$

Genügt dagegen m der zweiten Gleichung (8.), so ist in dieser Formel das Vorzeichen von $\mathfrak{M}$ zu ändern.

Die von den reellen Wurzeln der Gleichung (14.) §. 8 abhängenden Glieder in den gesuchten Functionen ψ und φ lassen sich demnach zu zwei zwischen den Grenzen 0 und ∞ nach dm auszuführenden Integralen zusammenfassen. Diese beiden Integrale sind der Form nach einander gleich, sie unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen der in ihnen vorkommenden Quadratwurzel aus $\mathfrak{M}^2$. Fasst man also beide Integrale zusammen, indem man sie auf gleiche Benennung bringt, so verschwindet aus der Summe diese irrationale Grösse $\mathfrak{M}$. Man erhält demnach ein Integral, das ausser trigonometrischen und Exponentialfunctionen nur noch algebraische Functionen der Variablen enthält. Das Integral zerfällt, wie C_m, in vier Theile, von denen der erste mit Ψ_1, der zweite mit Φ, der dritte mit $\Psi_2(y)$ und der vierte mit $\Psi_3(y)$ verschwindet. Alle diese Integrale enthalten im Nenner die Function zwölften Grades in Beziehung auf m

$$(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{111})^2 + 4\mathfrak{M}_{11}^2,$$

in welcher nur gerade Potenzen von m vorkommen, und zwar besteht der

Nenner immer *nur* aus dieser Function. Bei den in ψ_1 vorkommenden, von Ψ_1 und Φ abhängenden Integralen übersieht man dies sehr leicht. Denn es ist hier der Nenner

$$\mathfrak{M}\{\mathfrak{M}_1^2+(\mathfrak{M}_{11}+\mathfrak{M})^2\}\{\mathfrak{M}_1^2+(\mathfrak{M}_{11}-\mathfrak{M})^2\} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1^2\{(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_{111})^2+4\mathfrak{M}_{11}^2\},$$

dessen beide Factoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1^2$ sich gegen gleiche Factoren des Zählers herausheben. Dieser ist nämlich

$$\frac{4}{\pi}m^6\left\{\Psi_1+\frac{\alpha^4}{m^2}\Phi\right\}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\{(\beta_2+\beta_3)(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_{111})-2m(\beta_2\zeta_3+\beta_3\zeta_2)\mathfrak{M}_{11}\}$$
$$= \frac{4}{\pi}m^6\left\{\Psi_1+\frac{\alpha^4}{m^2}\Phi\right\}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1^2\{\beta_2+\beta_3+m^2(\beta_2\zeta_3^2+\beta_3\zeta_2^2)\}.$$

Bei den übrigen in ψ_1, ψ_2, ψ_3 und φ_1 vorkommenden Integralen ist dies nicht so leicht einzusehen. Doch wenn man eine langwierige Rechnung nicht scheut, so kann man sich überzeugen, dass es sich hier auch nicht anders verhält, sondern dass der Nenner aller Integrale lediglich aus der Function sechsten Grades von m^2

$$(11.)\qquad (\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_{111})^2+4\mathfrak{M}_{11}^2$$

besteht. Diese Function aber steht mit den complex-imaginären Wurzeln der Gleichung (5.) in so engem Zusammenhange, dass diese zunächst untersucht werden müssen. Es wird sich darnach sofort die Natur jener verwickelten Integrale übersehen lassen.

Ist m complex-imaginär, so wird für $c=\infty$

$$\operatorname{tg} mc = \pm i,$$

je nachdem der in $i=\sqrt{-1}$ multiplicirte Theil von m positiv oder negativ ist. Die ursprüngliche Gleichung (14.) §. 8 wird also für complexe m zu der algebraischen Gleichung sechsten Grades

$$(12.)\qquad 0 = m^4+\alpha^4-2m^3\left\{\frac{\beta_2}{\pm i+m\zeta_2}+\frac{\beta_3}{\pm i+m\zeta_3}\right\}$$

oder in der Form der Gleichung (5.) §. 9

$$(13.)\qquad 0 = \mathfrak{M}_1\pm 2i\mathfrak{M}_{11}+\mathfrak{M}_{111}.$$

Bei der Auflösung dieser doppelten Gleichung ist zu bemerken, dass nicht alle ihre Wurzeln m der Gleichung (14.) §. 8 zu genügen brauchen, sondern dass, wenn ein m der Gleichung (12.) für den Fall des oberen Vorzeichens genügt, es die Gleichung (14.) §. 8 nur erfüllt, wenn sein in i multiplicirter Theil positiv ist, und im Falle des unteren Vorzeichens, wenn dieser negativ

ist. Indess ist doch eine Untersuchung sämmtlicher Wurzeln nothwendig, da das Product der rechten Seiten der beiden durch doppeltes Vorzeichen unterschiedenen Gleichungen (13.) in einander gleich dem Nenner (11.) jener Integrale ist. Bei der Zerlegung dieser Integrale in Partialbrüche treten also alle Wurzeln der Gleichungen (13.) auf.

Die Natur der Wurzeln dieser Gleichung sechsten Grades ist sehr einfach aus der Gleichung selbst zu übersehen. Durch die Substitution

$$m = \pm iz$$

wird dieselbe

$$(14.)\qquad 0 = (z^4+\alpha^4)(\zeta_2 z+1)(\zeta_3 z+1)+2z^3\{\beta_2(\zeta_3 z+1)+\beta_3(\zeta_2 z+1)\}.$$

Diese Form der Gleichung zeigt, dass derselben kein positives reelles z genügen kann, dass sie dagegen mindestens zwei negative reelle Wurzeln z besitzt. Dies letztere ergiebt sich daraus, dass die rechte Seite der Gleichung für $z=0$ und für $z=-\infty$ positive, dagegen für zwischenliegende Argumente z negative Werthe annimmt, also mindenstens zweimal $=0$ wird. Negativ wird aber die rechte Seite der Gleichung (14.) z. B. für $z=-\frac{1}{\zeta_3}$, wenn von den Grössen ζ_3 und ζ_2 die erstere den grösseren Werth hat, dagegen falls die letztere die grössere ist, für $z=-\frac{1}{\zeta_2}$. Hiernach hat die Gleichung (14.) entweder zwei negative reelle und vier imaginäre, oder vier negative und zwei imaginäre oder endlich sechs negative reelle Wurzeln.

Beachtet man indess, dass in der Gleichung (14.) die Coefficienten der sechsten und fünften, der zweiten und ersten Potenz der Unbekannten in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, und benutzt die hieraus folgende Relation zwischen den diesen Coefficienten entsprechenden symmetrischen Functionen der sämmtlichen Wurzeln, so überzeugt man sich sofort, dass auch der letzte dieser drei Fälle nicht möglich ist, wenigstens wenn α von 0 verschieden ist; die Wurzeln müssen daher die Form haben

$$(15.)\quad \begin{cases} z = -ai+b\,;\ +ai+b\,;\ -b_1\,;\ -b_1'\,;\ -b_2\,;\ -b_3\,, \\ \text{also}\ m = +a\pm bi;\ -a\pm bi;\ \mp b_1 i;\ \mp b_1' i;\ \mp b_2 i;\ \mp b_3 i, \\ \text{oder}\ z = -ai+b\,;\ +ai+b\,;\ -a_1 i-b_1\,;\ +a_1 i-b_1\,;\ -b_2\,;\ -b_3\,. \\ \text{also}\ m = +a\pm bi;\ -a\pm bi;\ +a_1\mp b_1 i;\ -a_1\mp b_1 i;\ \mp b_2 i;\ \mp b_3 i, \end{cases}$$

wo alle a und b positiv sind.

Die Grössen b_2 und b_3 stehen in dem Verhältnisse, dass eine aus der anderen entsteht, wenn die Indices 2 und 3 mit einander vertauscht werden. Dies ist eine Folge davon, dass die Gleichung (14.) symmetrisch nach diesen

Indices ist, dass ferner für $\zeta_2 = \zeta_3$ $b_2 = b_3$ wird, und dass eine der beiden Wurzeln, etwa b_2, mit ζ_2 und b_3 mit ζ_3 verschwindet.

Etwas analoges findet zwischen den Grössen a und a_1, b und b_1 im letzten Schema (15.) statt. Man erhält nämlich a_1 aus a und b_1 aus b durch Vertauschung der Vorzeichen der Grössen β_2, β_3, ζ_2, ζ_3. Denn kehrt man in der Gleichung (14.) das Vorzeichen dieser Grössen um, so erhält man aus derselben dieselben Wurzeln, aber mit umgekehrtem Zeichen. Da sich nun für kleine Werthe der Reibungsconstanten, für welche jenes letzte Schema (15.) gültig ist, die Wurzel $+ai+b$ z. B. weder in $-ai-b$ noch in $+ai-b$ verwandeln kann, so muss dieselbe durch Umkehrung jener Vorzeichen in $+a_1 i + b_1$ übergehen, also a in a_1 und b in b_1.

Ich werde im Folgenden dies letzte Schema (15.), da es für die wirklich angestellten Beobachtungen das richtige ist, als gültig voraussetzen und auf dasselbe die weitere Transformation der gefundenen Ausdrücke basiren.

Von den gefundenen Wurzeln (15.) haben immer, wegen der Beschränkung des Vorzeichens von b, nur vier derselben

$$m = +a \pm bi \quad \text{und} \quad m = -a \pm bi$$

die Eigenschaft, der Gleichung (14.) §. 8 für $c = \infty$ zu genügen. Da ferner in den für die Functionen ψ und φ_1 gefundenen Ausdrücken gleiche, mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftete Wurzeln der Gleichungen keine verschiedenen Terme geben, so treten in denselben von diesen vier Wurzeln der Gleichung (14.) §. 8 nur zwei, etwa

$$m = a \pm bi$$

als bestimmende Constanten von particularen Integralen auf.

Die diesen Gliedern als Factoren zukommenden Constanten C_m folgen aus der zweiten Gleichung (19.) §. 8 für $m = a \pm bi$ und $c = c' = \infty$. Durch Einsetzen dieser Werthe wird nach den Gleichungen (20.) §. 8, da c gegen die in $\cos^2 mc$ enthaltene Exponentialgrösse verschwindet,

$$(16.) \qquad p = \frac{\zeta_2}{(\pm i + (a \pm bi)\zeta_2)^2}, \qquad p' = \frac{\zeta_3}{(\pm i + (a \pm bi)\zeta_3)^2};$$

ferner wird nach den Gleichungen (17.) §. 8

$$(17.) \qquad \begin{cases} P^{a \pm bi}(y) = \dfrac{\cos(a \pm bi)y \pm i \sin(a \pm bi)y}{1 \mp i(a \pm bi)\zeta_2}, \\ P_1^{a \pm bi}(y) = \dfrac{\cos(a \pm bi)y \pm i \sin(a \pm bi)y}{1 \mp i(a \pm bi)\zeta_3}. \end{cases}$$

Es wird also nach Gleichung (19.) §. 8

$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}C_{a\pm bi}\left\{1-3\left(\frac{a}{a\pm bi}\right)^4+2\beta_2 p+2\beta_3 p'\right\} \\ \qquad = \Psi_1+\frac{a^4}{(a\pm bi)^2}\Phi+2\beta_2\int_0^{\infty}\Psi_2(y)P(y)\,dy+2\beta_3\int_0^{\infty}\Psi_3(y)P_{,}(y)\,dy. \end{cases}$$

Da endlich für $m = a \pm bi$

$$(19.)\qquad e^{-m^2 t} = e^{-(a\pm bi)^2 t} = (\cos 2abt \mp i\sin 2abt)\,e^{-(a^2-b^2)t}$$

ist, so sieht man ein, dass diese complex-imaginären Terme der Functionen ψ und φ_1 mit den in den Formeln des §. 7 vorkommenden analogen Gliedern der Form nach völlig übereinstimmen, und dass sie sich von diesen nur durch die Werthe der Constanten unterscheiden. Man erhält nämlich durch Vereinigung der beiden von $a\pm bi$ abhängenden Lösungen auch hier Glieder von folgender Form, und zwar

$$(20.)\quad \begin{cases} \text{in } \varphi_1 & \{A_0\cos 2abt+B_0\sin 2abt\}\,e^{-(a^2-b^2)t} \\ \text{in } \psi_1 & \{A_1\cos 2abt+B_1\sin 2abt\}\,e^{-(a^2-b^2)t} \\ \text{in } \psi_2 & \{A_2\cos(2abt-ay)+B_2\sin(2abt-ay)\}\,e^{-by}\,e^{-(a^2-b^2)t} \\ \text{in } \psi_3 & \{A_3\cos(2abt-ay)+B_3\sin(2abt-ay)\}\,e^{-by}\,e^{-(a^2-b^2)t}. \end{cases}$$

Hierin bezeichnen die A und B von a und b abhängende Constanten, deren vollständige Entwicklung unnöthig ist. Neben der grossen Analogie mit den früheren Formeln des §. 8 zeigen diese allgemeineren einen wesentlichen Unterschied, darin nämlich, dass die in ψ_1, ψ_2 und ψ_3 enthaltenen Constanten A und B nicht dieselben sondern im Allgemeinen verschieden sind. Indess die Art, in der diese Terme von y und t abhängen, ist in dem jetzt untersuchten Falle genau dieselbe wie in dem früheren.

Eine ähnliche Analogie tritt in den Gliedern der Endausdrücke auf, welche durch Zerlegung der nach dm auszuführenden Integrale in Partialbrüche entstehen. Da die im Nenner dieser Integrale enthaltene Function (11.) vom sechsten Grade in Beziehung auf m^2 ist, so zerfallen die Integrale nicht wie früher in 4, sondern in 6 einfachere. Von diesen sind 4 den in §. 7 gefundenen völlig analog. Setzt man das letzte Schema (15.) als richtig voraus, was bei kleinen Werthen der Reibungsconstanten der Fall ist, so kommt man durch Zerlegung und gleiche Transformation wie in §. 7

auf die 4 Integrale (Gleichung (36.) §. 7)

$$(21.)\begin{cases} C(-y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty du.\cos(2au\sqrt{t})e^{-u^2}; & C'(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_1}^\infty du.\cos(2a_1u\sqrt{t})e^{-u^2}, \\ S(-y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty du.\cos(2au\sqrt{t})e^{-u^2}; & S'(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_1}^\infty du.\sin(2a_1u\sqrt{t})e^{-u^2}, \end{cases}$$

in denen die Grenzen die Bedeutung

$$u = b\sqrt{t}-\frac{y}{2\sqrt{t}}; \qquad u_1 = b_1\sqrt{t}+\frac{y}{2\sqrt{t}}$$

besitzen. Die constanten Coefficienten, mit denen die Functionen $C(-y)$ und $S(-y)$ multiplicirt werden, sind die in den Ausdrücken (20.) enthaltenen Constanten A und B; die Coefficienten von $C'(y)$ und $S'(y)$ sind aus a_1 und b_1 analog gebildet.

Die beiden übrigen durch Zerlegung entstandenen Integrale werden durch die Wurzeln b_2 und b_3 bestimmt; sie erlangen durch gleiche Behandlung die Formen

$$(22.)\begin{cases} C''(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_{11}}^\infty du.e^{-u^2}, \qquad C'''(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_{111}}^\infty du.e^{-u^2}, \\ \text{in denen} \\ u_{11} = b_2\sqrt{t}+\frac{y}{2\sqrt{t}}, \qquad u_{111} = b_3\sqrt{t}+\frac{y}{2\sqrt{t}} \end{cases}$$

gesetzt ist.

Bezeichnet man weiter den Formeln (37.) §. 7 analog

$$(23.)\begin{cases} U(-y) = e^{-by}e^{b^2t}\{(e^{-a^2t}-C(-y))\cos\vartheta-S(-y)\sin\vartheta\} \\ V(-y) = e^{-by}e^{b^2t}\{(e^{-a^2t}-C(-y))\sin\vartheta+S(-y)\cos\vartheta\} \\ U'(y) = e^{b_1y}e^{b_1^2t}\{C'(y)\cos\vartheta_1+S'(y)\sin\vartheta_1\} \\ V'(y) = e^{b_1y}e^{b_1^2t}\{C'(y)\sin\vartheta_1-S'(y)\cos\vartheta_1\} \\ U''(y) = e^{b_2y}e^{b_2^2t}C''(y) \\ U'''(y) = e^{b_3y}e^{b_3^2t}C'''(y) \end{cases}$$

wo die Grössen ϑ und ϑ_1 dieselbe Bedeutung haben wie in den Gleichungen (35.) §. 7

$$(24.) \qquad \vartheta = 2abt-ay \qquad \vartheta_1 = 2a_1b_1t+a_1y,$$

so erhält man folgende den Gleichungen (38.) und (39.) §. 7 ganz analoge Ausdrücke der gesuchten Functionen

$$(25.)\quad \begin{cases} \varphi_1 = A_0 U(0) + B_0 V(0) + A'_0 U'(0) + B'_0 V'(0) + A''_0 U''(0) + A'''_0 U'''(0) \\ \psi_1 = A_1 U(0) + B_1 V(0) + A'_1 U'(0) + B'_1 V'(0) + A''_1 U''(0) + A'''_1 U'''(0) \\ \psi_2 = A_2 U(y) + B_2 V(y) + A'_2 U'(y) + B'_2 V'(y) + A''_2 U''(y) + A'''_2 U'''(y) \\ \qquad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_2(y_1) \{\cos m(y-y_1) - \cos m(y+y_1)\} e^{-m^2 t} dm\, dy_1 \\ \psi_3 = A_3 U(y) + B_3 V(y) + A'_3 U'(y) + B'_3 V'(y) + A''_3 U''(y) + A'''_3 U'''(y) \\ \qquad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_3(y_1) \{\cos m(y-y_1) - \cos m(y+y_1)\} e^{-m^2 t} dm\, dy_1 . \end{cases}$$

Hierin sind die mit den Buchstaben A und B bezeichneten Grössen theils die schon in Gleichung (20.) eingeführten Constanten, theils diesen aus den anderen Wurzeln der Gleichung sechsten Grades analog gebildet. Einer näheren Berechnung dieser Coefficienten bedarf es zur Anwendung auf die Beobachtung nicht.

Hierzu genügt die Bemerkung, dass mit wachsendem t alle in den obigen Gleichungen enthaltenen Functionen sich weit rascher der Grenze Null nähern als die Glieder, welche die Exponentialgrösse

$$e^{-(a^2-b^2)t}$$

zum Factor haben. Dass sie sich überhaupt dieser Grenze Null nähern, sieht man nach den in §. 7 gemachten Bemerkungen ohne Schwierigkeit ein. Aus denselben folgt ebenfalls, dass die von a und b abhängenden Integral-Transcendenten C und S für grosse Argumente t gegen $e^{-a^2 t}$ verschwindend klein sind. Ebenso verhält es sich mit den entsprechenden von a_1 und b_1 abhängenden Functionen, wenn die in der Natur erfüllte Voraussetzung beibehalten wird, dass die Reibungsconstanten kleine Grössen sind; denn dann ist auch hier nahezu

$$a = a_1 \quad \text{und} \quad b = b_1 .$$

Noch rascher als diese Functionen nähern sich die von b_2 und b_3 abhängenden mit zunehmendem t der Grenze Null. Denn diese Grössen sind von ziemlich bedeutendem Werthe. Es ist mit Vernachlässigung von β_2 und β_3

$$b_2 = \frac{1}{\zeta_2}, \qquad b_3 = \frac{1}{\zeta_3}.$$

Nun sind die Grössen ζ nach den Formeln (8.) §. 8 gleich dem Verhältnisse von zwei Reibungsconstanten, also für kleine E von bedeutendem Werthe. Diese Constante E ist, wie die Beobachtung beweist, wirklich eine kleine

Grösse, b_2 und b_3 sind also bedeutend, und die Functionen $U''(y)$ und $U'''(y)$ verschwinden mit wachsendem t von einem von y abhängenden Werthe von t an äusserst rasch. Ich kann daher auch diese Functionen gegen die Exponentialfunction

$$e^{-(a^2-b^2)t}$$

vernachlässigen, sobald t hinlänglich gross geworden. Ob dieser Werth von t während der Beobachtung erreicht wird, muss die Beobachtung selbst lehren. Diese zeigt aber, dass schon nach wenigen Oscillationen des Apparats die Amplituden nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe abnehmen.

Ich bin also berechtigt, statt der Formeln (25.) für grosse Werthe von t folgende angenäherte als richtig anzusehen

$$(26.)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \{A_0\cos 2abt + B_0\sin 2abt\}\, e^{-(a^2-b^2)t} \\ \psi_1 = \{A_1\cos 2abt + B_1\sin 2abt\}\, e^{-(a^2-b^2)t} \\ \psi_2 = \{A_2\cos(2abt - ay_2) + B_2\sin(2abt - ay_2)\}\, e^{-by_2}\, e^{-(a^2-b^2)t} \\ \psi_3 = \{A_3\cos(2abt - ay_3) + B_3\sin(2abt - ay_3)\}\, e^{-by_3}\, e^{-(a^2-b^2)t}. \end{cases}$$

Hier habe ich nach den Gleichungen (6.) §. 8 die bisher nicht hervorgehobene Unterscheidung der beiden y, y_2 und y_3 wieder eingeführt, um die Verschiedenheit der Bewegung in beiden Flüssigkeiten hervortreten zu lassen.

Die Formeln (26.) zeigen, dass bei Anwesenheit zweier Flüssigkeiten die Bewegung in ähnlicher Weise vom Orte des bewegten Theilchens und von der Zeit abhängt, wie wenn die Scheibe nur von einer Flüssigkeit umgeben ist. Die Geschwindigkeit eines Theilchens der Flüssigkeit nimmt in geometrischer Progression mit wachsender Entfernung von der Scheibe ab, aber in beiden Flüssigkeiten nicht nach demselben Gesetze. Ausser diesem Unterschiede von dem früher untersuchten Falle zeigt sich noch der zweite bemerkenswerthe, dass die Geschwindigkeit eines der Scheibe unmittelbar benachbarten Flüssigkeitstheilchens von der der Scheibe um eine endliche Grösse verschieden ist. Die Geschwindigkeit, sowohl die der Scheibe als auch die der Flüssigkeit, ist eine periodische Function der Zeit. Beide bewegen sich in regelmässigen Oscillationen, deren Dauer

$$T = \frac{\pi}{2ab}$$

ist. Der Beginn einer Oscillation tritt für ein Theilchen der Flüssigkeit nicht zu derselben Zeit ein wie bei der Scheibe, sondern immer später, und zwar um so später, je weiter das Theilchen von der Scheibe entfernt ist. Die Verzögerung ist in unmittelbarer Nähe der Scheibe schon von endlicher Grösse

und ist in beiden Flüssigkeiten verschieden gross. Die Winkelgeschwindigkeit endlich nimmt mit zunehmender Zeit in geometrischer Progression ab, ebenso die Amplituden der Scheibe. Die Maximal-Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage bilden eine geometrische Reihe, deren logarithmisches Decrement in natürlichen Logarithmen

$$\varepsilon = (a^2 - b^2)T = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\pi$$

ist.

Zur vollständigen Discussion der Gleichungen bleibt nur noch eine Berechnung der Grössen a und b übrig. Ich habe diese Grössen in Form einer Reihe berechnet, welche nach aufsteigenden Potenzen der Reibungscoefficienten fortschreitet, jedoch eines praktischen Grundes wegen nicht nach Potenzen der im Vorstehenden enthaltenen Grössen β_2, β_3, ζ_2, ζ_3. Ich habe zunächst, da ich nur eine Anwendung auf das im Eingange des §. 8 erwähnte Experiment beabsichtigte, die Constante

$$E_3 = \infty, \quad \text{also} \quad \zeta_3 = 0$$

gesetzt. Ich habe dagegen die Voraussetzung gemacht, dass E_2 klein, η_2 aber verhältnissmässig gross, also ζ_2 ebenfalls gross sei, und demgemäss nach aufsteigenden Potenzen von

$$(27.) \qquad \beta_3 = \frac{\pi R^4 \sqrt{\eta_3 \varrho_3}}{4M}, \quad \xi = \frac{1}{\zeta_2} = \frac{E_2}{\sqrt{\eta_2 \varrho_2}} \quad \text{und} \quad \frac{\pi R^4 E_2}{4M} = \gamma$$

entwickelt. Diese Voraussetzungen sind z. B. erfüllt, wenn die Scheibe in Wasser unmittelbar unter der Oberfläche von Oel schwingt. Dann ist η_3 der kleine Coefficient der inneren Reibung des Wassers, η_2 der innere Reibungscoefficient des Oels, der von bedeutender Grösse ist, und E_2 der gegen letzteren kleine Coefficient der zwischen Wasser und Oel ausgeübten Reibung.

So habe ich erhalten

$$(28.) \quad \left\{ \begin{aligned} a + bi = {} & \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{i}{2}\beta_3 - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{3}{8}\frac{\beta_3^2}{\alpha} + \frac{1}{4}\frac{\beta_3^3}{\alpha^2} + \cdots \\ & + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{8}\frac{\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{16}\frac{\gamma^3}{\alpha^5} + \cdots \\ & - \frac{1}{2}\frac{\beta_3\gamma}{\alpha^2} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{5}{16}\frac{\beta_3^2\gamma}{\alpha^3} + \cdots \\ & - \frac{1}{2}\frac{\gamma\xi}{\alpha^2} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\frac{\gamma\xi^2}{\alpha^3} + \cdots \\ & + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{4}\frac{\beta_3\gamma\xi}{\alpha^3} + \cdots \end{aligned} \right.$$

wodurch a und b bis auf Grössen vierter Ordnung genau bestimmt sind. Diese Formel liefert zugleich den Werth von $a_1+b_1 i$, wenn in derselben die Vorzeichen von γ und ξ umgekehrt werden. Von den beiden übrigen Wurzeln $b_2 i$ und $b_3 i$ bleibt in diesem speciellen Falle nur die erstere, und zwar ist ebenfalls bis auf Grössen vierter Ordnung genau

$$b_2 = \xi.$$

Aus der Gleichung (28.) erhält man leicht die beiden für die Beobachtung interessanten Grössen, die Schwingungsdauer

$$(29.)\quad \left\{\begin{aligned} T = \frac{\pi}{2ab} = \frac{\pi}{\alpha^2}\Big\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta_3}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\frac{\beta_3^2}{\alpha^2} + \cdots \\ + \tfrac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\alpha^4} + \cdots \\ + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\beta_3\gamma}{\alpha^3} + \cdots \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma\xi}{\alpha^3} + \cdots \end{aligned}\right.$$

und das logarithmische Decrement der Amplituden

$$(30.)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon = \frac{a^2-b^2}{2ab}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta_3}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{\beta_3^2}{\alpha^2} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\frac{\beta_3^3}{\alpha^3} + \cdots \\ + \frac{\gamma}{\alpha^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\gamma^3}{\alpha^6} + \cdots \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\beta_3\gamma}{\alpha^3} + \tfrac{1}{2}\frac{\beta_3^2\gamma}{\alpha^4} + \cdots \\ + \frac{11}{8\sqrt{2}}\frac{\beta_3\gamma^2}{\alpha^5} + \cdots \\ - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma\xi}{\alpha^3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^2\xi}{\alpha^5} + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Die Schwingungsdauer in der Flüssigkeit ist also, wie schon oben bewiesen wurde, grösser als dieselbe im luftleeren Raume

$$(31.)\quad T_0 = \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

Das logarithmische Decrement ist ebenfalls grösser, als wenn die Scheibe unter der freien Oberfläche der durch den Index 3 bezeichneten Flüssigkeit (des Wassers ohne Oel darüber) ihre Schwingungen ausführte. In diesem Falle würde das logarithmische Decrement sein

$$(32.)\quad \varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\beta_3}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{\beta_3^2}{\alpha^2} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\frac{\beta_3^3}{\alpha^3} + \cdots

Die Differenz

$$(33.)\quad \begin{cases} \varepsilon-\varepsilon' = \dfrac{\gamma}{\alpha^2}\Big\{1 \qquad + \tfrac{1}{2}\dfrac{\gamma^2}{\alpha^4}+\cdots \\ \qquad -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\beta_3}{\alpha}+\tfrac{1}{2}\dfrac{\beta_3^2}{\alpha^2}+\cdots \\ \qquad\qquad +\dfrac{11}{8\sqrt{2}}\dfrac{\beta_3\gamma}{\alpha^3}+\cdots \\ \qquad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\xi}{\alpha}+\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\dfrac{\gamma\xi}{\alpha^3}+\cdots \end{cases}$$

kann mit Vortheil zur Berechnung der Constante E benutzt werden.

Die über diesen Gegenstand angestellten Beobachtungen theile ich nicht hier, sondern nur in meiner experimentellen Abhandlung mit, da sie von geringem theoretischen Interesse sind.

In ganz derselben Weise, und zwar ohne eine Annäherung einzuführen, die der in §. 5 erörterten analog wäre, lässt sich die Rechnung für den Fall ausführen, dass statt der Scheibe eine *Kugel* in der Flüssigkeit oscillirt. Dass diese Rechnung streng ausführbar ist, hat seinen Grund in dem Vortheile, den die Anwendung der Kugelfunctionen gewährt. Der Gang der Untersuchung für den Fall der Kugel sowie das Resultat sind den hier für die Scheibe durchgeführten so vollständig analog, dass in dieser Analogie eine gewisse Begründung der gemachten Annäherung liegt.

Man führt passend statt der Winkelgeschwindigkeit ψ eines Flüssigkeitstheilchens als abhängige Variable der Differentialgleichung die Grösse

$$P = r^2\psi\sqrt{1-\mu^2}$$

ein, indem man r den Abstand des Theilchens vom Mittelpunkte der Kugel und μ den Cosinus des Winkels nennt, den die Richtung von r mit der Drehungsaxe einschliesst. Diese Grösse genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{\partial\left((1-\mu^2)\frac{\partial P}{\partial\mu}\right)}{r^2\partial\mu}+\frac{P}{r^2(1-\mu^2)}.$$

Man integrirt diese Gleichung leicht, wenn man P in eine Reihe entwickelt, welche nach den Grössen

$$p^{(n)} = \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP^{(n)}}{d\mu}$$

fortschreitet. Hierin ist $P^{(n)}$ die Kugelfunction von der Ordnung n, also die

ganze algebraische Function, welche der Differentialgleichung

$$0 = \frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dP^{(n)}}{d\mu}\right)}{d\mu} + n(n+1)P^{(n)}$$

genügt, so dass $p^{(n)}$ die Differentialgleichung

$$0 = \frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dp^{(n)}}{d\mu}\right)}{d\mu} - \frac{p^{(n)}}{1-\mu^2} + n(n+1)p^{(n)}$$

erfüllt.

Als Coefficienten der so eingesetzten Reihe erhält man dann Functionen $q^{(n)}$ von r und t, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial q^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 q^{(n)}}{\partial r^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}q^{(n)}$$

genügen. Die Integration dieser Gleichung gelingt leicht, indem man $q^{(n)}$ gleich dem Producte einer Function von t in eine andere Function von r setzt.

Man erhält so P dargestellt durch eine Reihe von particularen Integralen, von denen einige die von der Kugel unabhängige Bewegung der Flüssigkeit, andere die beiden gemeinsame darstellen. Dies führt wieder auf die Aufsuchung der Wurzeln mehrerer transcendenter Gleichungen. Unter diesen Gleichungen besitzt eine, diejenige, welche die gemeinsame Bewegung von Kugel und Flüssigkeit bestimmt, complex-imaginäre Wurzeln. Nimmt man die Flüssigkeit unbegrenzt an, so findet man, dass die beiden complex-imaginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen. Dieselbe ist für den Fall, dass die Flüssigkeit fest an der Oberfläche der Kugel haftet, vom fünften Grade, während die entsprechende Gleichung bei der Scheibe vierten Grades ist. Dies macht den Unterschied, dass bei der Zerlegung der Integrale, welche aus den von den reellen Wurzeln herrührenden particularen Lösungen entstanden sind, in Partialbrüche einige Glieder mehr auftreten als bei der Scheibe.

Ganz ebenso ist das von *Helmholtz* untersuchte Problem zu behandeln, wenn man die Integration streng durchführen will. Wie bereits erwähnt, betrifft dies Problem ein Experiment, bei welchem sich die Flüssigkeit im Innern einer Hohlkugel befindet, welche um einen ihrer Durchmesser als Axe schwingt. Es tritt hier der Unterschied ein, dass die complex-imaginären Wurzeln der transcendenten Gleichungen nicht zugleich Wurzeln von algebraischen Gleichungen sind. Ferner vereinigen sich die von den reellen Wurzeln herrührenden Lösungen der Differentialgleichungen nicht zu Integralen.

Man überzeugt sich aber auf diesem Wege, dass die von *Helmholtz* aufgestellten particularen Integrale der Gleichungen diejenigen sind, von denen die numerische Berechnung der Beobachtungen abhängt; vorausgesetzt, dass noch der Nachweis geliefert würde, dass die transcendente Gleichung nur *ein* Paar imaginärer Wurzeln besitzt, oder was dasselbe ist, dass die von *Helmholtz* aufgestellten Gleichungen Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement der Amplituden eindeutig bestimmen.

Breslau, im Januar 1861.

Sur l'invariant du 18[e] ordre des formes du cinquième degré et sur le role qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré, extrait de deux lettres de M. *Hermite* à l'éditeur.

. . . J'ai entrepris en suivant la méthode de M. *Kronecker* de creuser un peu plus à fond la résolution de l'équation du 5[e] degré . . . . Chemin faisant j'ai eu à étudier l'invariant du 18[e] ordre des formes du cinquième degré qui joue un role fondamental dans la marche que j'ai suivie. Peut-être vous interessera-t-il de connaître comment il s'exprime au moyen des racines x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 de la forme représentée par

$$f = a(x-x_0y)(x-x_1y)(x-x_2y)(x-x_3y)(x-x_4y).$$

Voici le résultat que j'ai obtenu. Soit pour abréger

$$(mn) = x_m - x_n,$$

on aura

$$\begin{aligned} I = a^{18} & \{(01)(04)(32)+(02)(03)(14)\}\{(01)(02)(43)+(03)(04)(12)\}\{(01)(03)(42)+(02)(04)(31)\} \\ & \times\{(12)(10)(43)+(13)(14)(20)\}\{(12)(13)(04)+(14)(10)(23)\}\{(12)(14)(03)+(13)(10)(42)\} \\ & \times\{(23)(21)(04)+(24)(20)(31)\}\{(23)(24)(10)+(20)(21)(34)\}\{(23)(20)(14)+(24)(21)(03)\} \\ & \times\{(34)(32)(10)+(30)(31)(42)\}\{(34)(30)(21)+(31)(32)(40)\}\{(34)(31)(20)+(30)(32)(14)\} \\ & \times\{(40)(43)(21)+(41)(42)(03)\}\{(40)(41)(32)+(42)(43)(01)\}\{(40)(42)(31)+(41)(43)(20)\} \end{aligned}$$

Les quinze facteurs ont été réunis trois à trois de manière à former cinq produits, symétriques chacuns par rapport à toutes les racines moins une. Le produit total est donc bien symétrique par rapport à toutes les racines, et l'on reconnait d'ailleurs immédiatement qu'il représente un invariant car il ne change pas quand on remplace les racines par leurs inverses et qu'on les augmente d'une même quantité . . . .

Désignons par X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 les cinq produits de trois facteurs dont se compose l'expression de l'invariant I, de sorte que

$$X_0 = \{(01)(04)(32)+(02)(03)(14)\}\{(01)(03)(43)+(03)(04)(12)\}\{(01)(03)(42)+(02)(04)(31)\}$$

etc.

on peut écrire

$$I = a^{18} X_0 X_1 X_2 X_3 X_4$$

et X_k sera une fonction rationelle et entière de la seule racine x_k. Cela posé les quantités suivantes

$$\begin{aligned}
z_0 &= a^6 X_0 (12)(13)(14)(23)(24)(34),\\
z_1 &= a^6 X_1 (23)(24)(20)(34)(30)(40),\\
z_2 &= a^6 X_2 (34)(30)(31)(40)(41)(01),\\
z_3 &= a^6 X_3 (40)(41)(42)(01)(02)(12),\\
z_4 &= a^6 X_4 (01)(02)(03)(12)(13)(23)
\end{aligned}$$

seront elles mêmes sauf un facteur qui est la racine du discriminant, des fonctions rationelles semblables de x_0, x_1 etc., car on peut écrire par exemple en représentant le discriminant par Δ:

$$z_0 = a^2 X_0 \frac{\sqrt{\Delta}}{(01)(02)(03)(04)},$$

ce qui est évidemment une fonction rationnelle de x_0. Or l'équation du cinquième degré dont les racines seront ces quantités z_0, z_1 etc. aura pour coefficients des invariants, et sera de cette forme:

$$z^5 + Lz^3 + M\Delta z + I\sqrt{\Delta^3} = 0$$

L et M étant du 12[e] et du 16[e] ordre et I du 18[e].

Ueber die Gleichungen fünften Grades.

(Aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

(Von Herrn *Kronecker*.)

Ich habe in jüngster Zeit eine Frage zum Abschluss gebracht, mit der ich mich seit fünf Jahren ab und zu beschäftigt und welche ich immer wieder aufgenommen hatte, weil deren Erledigung für die weitere Richtung meiner algebraischen Untersuchungen bestimmend sein musste. — Ich kam nämlich bei meinen Studien über die algebraische Auflösung der Gleichungen sehr bald zur Einsicht, dass das Problem nach zwei Seiten hin einer allgemeineren Auffassung fähig ist, und zwar in folgender Weise: einerseits sind statt der Gleichungscoefficienten, d. h. also statt der symmetrischen Functionen der Wurzeln, allgemeinere rationale Functionen derselben, welche ich Affectfunctionen nenne, als gegeben vorauszusetzen: andererseits sind statt der gewöhnlichen Wurzelzeichen d. h., also statt derjenigen Functionszeichen, welche durch die reinen Gleichungen definirt werden, allgemeinere algebraische Functionen einzuführen, welche bei der Auflösung als Hilfsfunctionen dienen sollen. Die erstere Seite dieser erweiterten Auffassung war, wenn auch nicht in deutlich ausgesprochener Weise, schon in älteren algebraischen Arbeiten enthalten; in der zweiten Art der Verallgemeinerung ist das Problem aber erst in neuerer Zeit von Hrn. *Hermite* und gleichzeitig von mir selbst aufgenommen worden. Indessen war der Weg, welchen ich dabei einschlug, von demjenigen des Hrn. *Hermite* durchaus verschieden, und namentlich hat eine Forderung, welche ich an die Methode der Lösung stellte, mir den Abschluss der Frage für die Gleichungen fünften Grades erschwert, aber andererseits, weil sie in der Natur der Sache begründet ist, auch auf weitere interessante Untersuchungen geführt.

„Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, dass sich alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen" — so lautet ein Satz von *Abel*, der eine überaus wichtige Eigenschaft der gewöhnlichen Wurzel-

ausdrücke enthält. Diese Eigenschaft ist es, welche auch den allgemeineren Ausdrücken für die Wurzeln der im gewöhnlichen Sinne nicht auflösbaren Gleichungen erhalten bleiben muss, und dieser Forderung gemäss sind die neuen algebraischen Functionszeichen zu wählen, mit Hilfe deren die Auflösung von Gleichungen im weiteren Sinne zulässig wird.

Die erwähnte Forderung, welche ich in einer ausführlicheren Mittheilung näher begründen werde, leitete mich bei der Beschäftigung mit den Gleichungen fünften Grades darauf hin, rationale Functionen der fünf Wurzeln zu suchen, deren verschiedene durch Permutation der Wurzeln entstehende distincte Werthe möglichst viele identische Relationen unter einander haben. Indem ich aus leicht ersichtlichen Gründen nur solche Permutationen zuliess, welche einen Werth der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades ungeändert lassen, fand ich in der That zwölfwerthige rationale Functionen der fünf Wurzeln, welche die Eigenschaft haben, dass je zwei von den zwölf Werthen derselben sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und die sechs verschiedenen absoluten Werthe durch drei lineare Relationen mit einander verbunden sind. Das Quadrat einer solchen Function ist deshalb Wurzel einer Gleichung sechsten Grades, deren Coefficienten aus denen der Gleichung fünften Grades und aus der Quadratwurzel der Discriminante in rationaler Weise zusammengesetzt und nur von drei solchen rationalen Ausdrücken abhängig sind. Durch die Auffindung dieser Art von Functionen gelang es mir erstens fast ohne alle Rechnung die Modulargleichung fünfter Ordnung für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zu benutzen, und ich habe deshalb zwei jener bemerkenswerthen Functionen Hrn. *Hermite* in einem Briefe mitgetheilt, welcher in den *comptes rendus* der Pariser Akademie vom Jahre 1858 abgedruckt ist; zweitens aber war dadurch die Möglichkeit gegeben, die allgemeinen Gleichungen fünften Grades in einer der oben erwähnten Forderung entsprechenden Weise aufzulösen, aber freilich nur mit Hilfe algebraischer Functionen von *zwei* Variabeln. Um diesen wichtigen Punkt näher zu erörtern, setze ich:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma\Sigma \sin\frac{2n\pi}{5} \cdot x_m x_{m+n}^2 x_{m+2n}^2,$$

wo x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades: $X = 0$ bedeuten, die Summationen sich auf die Werthe $m = 0, 1, 2, 3, 4$ und $n = 1, 2, 3, 4$ erstrecken, und die grösseren Indices auf die kleinsten Reste modulo: 5 zu reduciren sind. Alsdann genügt $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ einer

Gleichung zwölften Grades:

$$\text{(I.)}\quad (f^2+a)^6+4a(f^2+a)^5+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)-4ac+5b^2 = 0,$$

in welcher a, b, c zweiwerthige ganze rationale Functionen der fünf Wurzeln x sind. Aber es giebt ausser der Function f noch unzählige rationale Functionen der Wurzeln x, welche dieselbe Eigenschaft haben, Gleichungen zwölften Grades von der angegebenen Form zu erfüllen *), und unter den rationalen *gebrochenen* Functionen dieser Art giebt es wiederum solche, für welche die den Grössen a, b, c entsprechenden Ausdrücke nur von zwei rationalen zweiwerthigen Functionen: $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ abhängen. Eine derartige speciellere Function f ist daher eine implicite gegebene algebraische Function von φ und ψ und möge als solche mit: $W(\varphi, \psi)$ bezeichnet werden. Da nun die Functionen f cyklisch sind, also mit Hilfe derselben die Gleichung: $X=0$ auflösbar wird, so lassen sich die Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften Grades mit Hilfe von Quadratwurzeln, fünften Wurzeln und mit Hilfe des Functionszeichens W explicite darstellen, und zwar in einer Weise, welche die oben angedeutete Forderung vollständig erfüllt. — Alles dies ergab sich mir im Wesentlichen bei Auffindung jener Functionen: f als unmittelbare Consequenz. Aber es galt nun zu ermitteln, ob hiermit die Frage abgeschlossen, d. h. ob es unmöglich sei, die algebraische Function zweier Variabeln: W auf solche von *einer* Variablen zurückzuführen. Dass, wenn man jene mehrerwähnte Forderung dabei fallen lässt, eine solche Reduction in der That möglich ist, war seit lange bekannt und ist von mir in jenem Briefe an Hrn. *Hermite* neuerdings dargelegt worden. Ich hatte auch bei weiterer Beschäftigung mit diesem Gegenstande noch speciellere darauf bezügliche Resultate erlangt. Aber erst vor Kurzem ist es mir gelungen, die Hauptfrage zu erledigen und festzustellen, dass die Reduction der algebraischen Function: W auf Functionen *einer* Variabeln und deshalb überhaupt die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit Hilfe von algebraischen Functionen *einer* Variabeln unmöglich ist, wenn dabei jener oben angeführte und für die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelzeichen geltende Satz *Abels* bestehen bleiben soll. Dieses Ergebniss bildet somit eine, wie mir scheint, bemerkens-

---

*) Man sehe hierüber auch die Ausführungen des Hrn. *Brioschi* in seiner Note: *„Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado"* (am 25. November 1858 im Lombardischen Institut gelesen), wo auch für eine besondere Function f der vollständige Ausdruck der Coefficienten a, b, c durch die Invarianten der Gleichung fünften Grades zuerst gegeben ist.

werthe Erweiterung des *Abel*schen Beweises für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade; und es enthält zugleich für den Fall des fünften Grades den Abschluss des Auflösungsproblems in seiner allgemeineren Fassung, einen Abschluss, vor dessen Erreichung ich meine Resultate nicht als fertig und für eine Veröffentlichung reif betrachten konnte.

Dass sich hier in der Algebra das Bedürfniss geltend macht, Functionen zweier Variabeln einzuführen, wiewohl dieselben in gewisser Weise auf Functionen *einer* Variabeln zurückführbar sind, kann durchaus nicht befremden, wenn man sich dessen erinnert, dass auch in der Analysis die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln durch *Jacobi* eingeführt und als durchaus naturgemäss beibehalten worden sind, obgleich dieselben, wie er selbst im 30sten Bande dieses Journals gezeigt hat, sich aus Functionen *einer* Variabeln algebraisch zusammensetzen lassen. Ohne indessen auf diese Analogie näher einzugehen, will ich mich zu den Gleichungen fünften Grades zurückwenden und an die oben angedeutete Form der Auflösung derselben noch einige Bemerkungen knüpfen.

Wenn man, wie im Vorhergehenden, mit $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine der Functionen bezeichnet, die einer Gleichung von der Form (I.) genügen, und wenn

$$f_k = f(x_k, x_{k+3}, x_{k+4}, x_{k+1}, x_{k+2})$$

gesetzt wird, so sind: $\pm f$, $\pm f_0$, $\pm f_1$, $\pm f_2$, $\pm f_3$, $\pm f_4$ die zwölf verschiedenen Wurzeln jener Gleichung. Es giebt nun wiederum rationale Functionen der sechs verschiedenen Grössen f, welche Wurzeln von Gleichungen fünften Grades sind, deren Coefficienten sich aus a, b, c rational zusammensetzen. Wenn Φ eine dieser Functionen der Grössen f bedeutet, so ist demnach Φ zugleich eine rationale Function der Wurzeln x selbst, und zwar eine solche, die, als ganze rationale Function *einer* der Wurzeln x dargestellt, in ihren Coefficienten nur diejenigen der Gleichung: $X=0$ und die Quadratwurzel der Discriminante derselben rational enthält. Auch lässt sich ohne alle Rechnung zeigen, dass das Product: $(f-f_0)(f_1-f_4)(f_2-f_3)$, welches unter den mit: Φ bezeichneten Functionen inbegriffen ist, einer Gleichung fünften Grades genügt, in welcher sowohl der zweite als der vierte Coefficient gleich Null ist. Dieses Resultat, welches ein gewisses formales Interesse hat, lässt sich übrigens auch aus einer der schönen Notizen entnehmen, mit welchen Hr. *Brioschi* die Anzeige von der *Hermite*schen Auflösung der Gleichungen fünften Grades begleitet hat. Ferner hat neuerdings auch Hr. *Hermite* in einer brieflichen Mit-

theilung an Hrn. *Borchardt* *) eine specielle Function der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades angegeben, welche zu jenen Functionen: Φ gehört und sowohl durch ihre Einfachheit als namentlich durch ihre Beziehung zu den Invarianten der Gleichung ein besonderes Interesse darbietet. Das Wesen der Sache aber, welches schon aus den einfachsten Betrachtungen über die Functionen f hervorgeht, lässt sich folgendermaassen zusammenfassen:

> Unter den zehnwerthigen rationalen Functionen von fünf Grössen: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, welche bei allen cyklischen Permutationen von je drei dieser Grössen nur fünf Werthe annehmen, giebt es solche, für welche die symmetrischen Functionen dieser fünf Werthe nur von zwei Functionen der Grössen x abhängen; es giebt ferner unter ihnen speciell solche, für welche die Summe der fünf Werthe selbst ebenso wie die Summe der dritten Potenzen derselben identisch verschwindet.

Durch die hiernach auftretenden *speciellen* Gleichungen fünften Grades, wie z. B. durch die Gleichungen von der Form: $z^5+pz^3+qz+r=0$, werden algebraische Functionen, die im Wesentlichen von zwei Variabeln abhängen, definirt; es werden also algebraische Functionen dadurch eingeführt, die ebenso wie die obige Function W für die Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades benutzt werden könnten. Aber in Hinsicht auf gewisse allgemeinere Auflösungsprobleme verdient die Einführung der obigen Gleichung zwölften Grades als Hilfsgleichung den Vorzug, und eine genauere Discussion derselben lässt ihre vielen bemerkenswerthen Eigenschaften und damit zugleich die verschiedenen Formen erkennen, welche man bei Anwendung des Zeichens W den Wurzeln der Gleichungen fünften Grades geben kann.

---

*) Pag. 304.

Berlin, im Juni 1861.

Ueber die Bedingungen der Integrabilität.

(Von Herrn *Kronecker*.)

I. Jeder Ausdruck: $X_0 dx_0 + X_1 dx_1 + \cdots + X_{n-1} dx_{n-1}$, in welchem X_0, X_1, ... beliebige rationale Functionen der Variabeln x sind, lässt sich, wenn für alle Werthe $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$:

$$x_k = (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^n$$

gesetzt und für ω irgend eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit genommen wird, auf folgende bemerkenswerthe Form bringen:

$$(A.)\quad \varphi(z_0, z_1, \ldots z_{n-1}) dz_0 + \varphi(z_1, z_2, \ldots z_0) dz_1 + \varphi(z_2, z_3, \ldots z_1) dz_2 + \cdots + \varphi(z_{n-1}, z_0, \ldots z_{n-2}) dz_{n-1}.$$

Durch die angegebene Substitution gehen nämlich X_0, X_1, ... in gewisse rationale Functionen der Variabeln z über, welche respective mit: f_0, f_1, ... bezeichnet werden sollen, und es verwandelt sich demnach $\Sigma X_k dx_k$ in:

$$(B.)\quad n.\sum_{k=0}^{k=n-1} f_k . (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^{n-1} . (dz_0 + \omega^k dz_1 + \omega^{2k} dz_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} dz_{n-1}).$$

In diesem Ausdruck ist der Factor von dz_0:

$$n.\Sigma f_k . (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^{n-1},$$

welcher mit: $\varphi(z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1})$ bezeichnet werden möge. Wenn hierin die Variabeln z cyklisch permutirt werden, und zwar dergestalt, dass z_i für z_0, z_{i+1} für z_1, etc. gesetzt wird, so bleiben die Ausdrücke: $(z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^n$, aus denen f_0, f_1, ... rational zusammengesetzt sind, also auch diese Functionen f selbst ungeändert, und man erhält demnach:

$$\varphi(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots z_{i-1}) = n.\Sigma f_k . (z_i + \omega^k z_{i+1} + \omega^{2k} z_{i+2} + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{i-1})^{n-1}$$

oder

$$\varphi(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots z_{i-1}) = n.\Sigma f_k . \omega^{ik} (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{(n-1)k} z_{n-1})^{n-1}.$$

Es ist daher $\varphi(z_i, z_{i+1}, \ldots z_{i-1})$ der Factor von: dz_i in dem Ausdrucke (*B.*), welcher also in der That die aufgestellte Form (*A.*) annimmt.

Wenn man die Voraussetzung, dass X_0, X_1, ... die Variabeln x nur rational enthalten sollen, fallen lässt, so ist die Verwandlung von $\Sigma X_k dx_k$ in einen Ausdruck von der Form (*A.*) zwar noch möglich, aber es sind dabei gewisse Erörterungen nöthig, die ich der Kürze halber übergehen muss.

II. Für die Form (*A.*), auf welche sich, wie eben gezeigt worden, jeder Differentialausdruck: $\Sigma X_k dx_k$ bringen lässt, reduciren sich die Bedingungen der Integrabilität (je nachdem n grade oder ungrade ist) auf nur $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Gleichungen, welche durch die folgende repräsentirt werden:

$$(C.)\qquad \frac{\partial\varphi(z_0, z_1, \dots z_{n-1})}{\partial z_k} = \frac{\partial\varphi(z_k, z_{k+1}, \dots z_{k-1})}{\partial z_0},$$

wenn darin k die Zahlen 1, 2, 3, ... bis $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet. Da nämlich in der allgemeinen Bedingung der Integrabilität des Ausdruckes (*A.*):

$$\frac{\partial\varphi(z_r, z_{r+1}, \dots z_{r-1})}{\partial z_s} = \frac{\partial\varphi(z_s, z_{s+1}, \dots z_{s-1})}{\partial z_r}$$

angenommen werden kann, dass der kleinste positive Rest von: $(s-r)$ modulo n nicht über $\frac{1}{2}n$ liegt, so geht dieselbe aus der Gleichung (*C.*) unmittelbar hervor, wenn darin für k jener Rest von: $(s-r)$ genommen wird und $z_0, z_1, \dots z_{n-1}$ respective durch $z_r, z_{r+1}, \dots z_{r-1}$ ersetzt werden.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass die angegebene Reduction der Integrabilitätsbedingungen ebenso rein formaler Art ist wie diejenige, welche *Jacobi* im 23sten Bande dieses Journals pag. 101 gegeben hat. Die Bedingungen dafür, dass $\Sigma X_k dx_k$ integrabel, dass also die Gleichung:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$$

für alle Indices r und s identisch erfüllt sei, sind wesentlich Bedingungen für die in $X_0, X_1, \dots$ enthaltenen Constanten und bleiben als solche von allen jenen Reductionen unberührt.

Berlin, den 20. August 1861.

Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes.

(Par M. *E. de Jonquières.*)

---

§. 1.

Solution d'une question générale concernant les transversales rectilignes dans les courbes algébriques.

1. Problème. ***D**éterminer la classe de la courbe enveloppe d'une transversale qui coupe une courbe algébrique plane C_m, du degré m, de telle sorte, qu'une fonction déterminée (F) des distances mutuelles de n des points d'intersection de la transversale et de la courbe, ait une valeur donnée λ; (F) étant une fonction algébrique, entière et rationnelle.*

Ce problème et celui auquel il donne lieu corrélativement, par voie de dualité, résument, avec beaucoup de généralité, un ensemble de questions intéressantes concernant les courbes algébriques planes, dont M. *Steiner* a déjà traité plusieures, dans un beau Mémoire inséré dans le 47ᵉ vol. de ce Journal et que M. *Voepcke* nous a fait connaître par une excellente traduction insérée au tome XVIII du Journal de *Liouville,* pages 309 et suivantes.

Je me propose d'indiquer ici un procédé général, basé sur des considérations de pure Géométrie, qui conduit à la solution de ce problème. On aura ainsi la clef des résultats énoncés, sans démonstration, par M. *Steiner,* et j'en donnerai moi-même, à titre d'applications, plusieurs exemples nouveaux.

2. Le problème ci-dessus énoncé revient à déterminer le nombre des transversales satisfaisant à la question, qu'il est possible de mener par un point quelconque o, pris dans le plan de la courbe C_m, mais étranger à cette courbe.

Menons une transversale arbitraire oL; prenons $n-1$ points parmi ceux où elle rencontre la courbe; et soit x un $n^{\text{ième}}$ point tel, que la fonction (F) des distances mutuelles de ces n points ait la valeur donnée λ. Il existe, en général, plusieurs points x, distincts l'un de l'autre, qui satisfont à cette condition; supposons que N en exprime le nombre, qui dépendra, dans chaque cas, de la nature de la fonction (F).

Chacun des groupes distincts de $n-1$ points, auxquels donnent lieu les m points d'intersection de oL avec C_m, détermine N points x. Or le nombre

des combinaisons de m points, pris $n-1$ à $n-1$, est

$$Q = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-2))}{1.2.3\dots(n-1)}.$$

Donc il existe d'abord QN points x sur oL. Quand la transversale tourne autour du point o, ces points x décrivent une courbe Σ, dont le degré serait précisément QN, si la courbe Σ ne passait pas par le point o. Mais ce point peut appartenir à la courbe Σ; il peut même en être un point multiple. Si P est l'ordre de multiplicité de ce point, le degré de la courbe Σ sera

$$QN+P.$$

Soit α un point d'intersection de C_m et de Σ. Ce point, s'il n'est pas, par des circonstances particulières, étranger à la question, détermine une transversale $o\alpha$ qui satisfait à l'énoncé du problème; car on a, sur cette droite, n points de C_m dont la fonction (F) de leurs distances mutuelles a, par construction, la valeur donnée.

Le nombre des points d'intersection de C_m et de Σ est équivalent à $m(QN+P)$; mais le nombre réel de ces points d'intersection sera moindre, si Σ possède des points multiples sur C_m; et, en outre, quelques-uns d'entre eux pourront être étrangers à la question, par exemple si le lieu Σ des points x passe par un point de coïncidence de deux points de la courbe C_m; car, dans ce cas, la fonction (F) serait satisfaite par les distances mutuelles de $n-1$ points seulement de C_m, au lieu de l'être par celles de n points, comme le demande l'énoncé du problème.

Soit donc T le nombre dont, à cause des deux considérations précédentes, on devra diminuer le nombre théorique $m(QN+P)$; on aura enfin, sur C_m, $m(QN+P)-T$ points α donnant lieu chacun à une transversale $o\alpha$ qui satisfait à la question. Mais il peut arriver que ces transversales ne soient pas toutes distinctes.

Par exemple, si la fonction (F) est de telle nature, que les n points, entre les distances desquels elle a lieu, n'aient rien qui les distingue l'un de l'autre, les points d'intersection de C_m et de Σ seront situés, n à n, sur des droites concourantes en o, et parconséquent le nombre des transversales qui satisfont à la question, c'est-à-dire la *classe* de la courbe cherchée, sera simplement

$$\frac{1}{n}(m(QN+P)-T).$$

Ce cas se présente souvent, comme on le verra ci-après. Ainsi, supposons

que (F) soit la fonction anharmonique de quatre points. Si une transversale oL satisfait à la condition que le rapport anharmonique des quatre points de C_m a, b, c, d ait la valeur donnée, il est clair que ces quatre points indistinctement appartiendront à la courbe Σ, et qu'ils ne donneront lieu qu'à une seule transversale.

Dans d'autres cas, au contraire, chaque point d'intersection des courbes Σ et C_m donnera lieu à une transversale distincte; par exemple, si l'un des points d'intersection doit être le milieu de deux autres, ou bien le *point central* d'une des involutions déterminées par quatre autres, etc. C'est qu'alors tous les points, dont les distances mutuelles entrent dans la fonction (F), n'y jouent pas le même rôle.

3. Le nombre T se déterminera, dans chaque cas, par des considérations particulières, et parfois assez délicates, dépendantes de l'espèce de la fonction (F) et de la valeur qui lui est attribuée.

D'ailleurs, le plus souvent, c'est sur celles des transversales issues du point o qui offrent quelque singularité, qu'on devra rechercher les causes d'exception dont T résume le nombre. Ces transversales sont les tangentes à C_m issues du point o, et les parallèles à ses asymptotes menées par le même point. Sur les premières, l'une des distances de deux points de la courbe devient nulle; sur les secondes, quelques-unes de ces distances sont infinies; et l'on conçoit que l'introduction de ces deux circonstances puisse, selon la nature de la fonction (F), amener des solutions étrangères à la question ou des points multiples sur la courbe auxiliaire Σ.

Quant au nombre P, on le trouvera à l'aide de raisonnements analogues à ceux qui précèdent. Ce nombre exprime, comme on l'a dit, l'ordre de multiplicité du point o sur la courbe Σ, ou, en d'autres termes, il exprime combien de fois il arrive, pour l'infinité des positions que la transversale prend autour du point o, que le point o, associé à $n-1$ des points de rencontre de cette transversale et de la courbe, satisfait à l'énoncé du problème.

On mènera donc une droite arbitraire oL; on associera le point o à chacune des combinaisons distinctes des m points d'intersection de oL et de C_m, pris $n-2$ à $n-2$; et, pour chacun de ces groupes de $n-1$ points, on aura, sur oL, N points y, dont chacun, étant associé à ceux du groupe, satisfera à la question générale, c'est-à-dire, sera tel, que la fonction (F) des distances mutuelles de ces n points aura la valeur donnée λ.

Quand oL tournera autour du point o, les points y décriront une courbe Σ', dont on déterminera le degré. Cette détermination se fera à l'aide de

considerations analogues à celles qui ont été employées à l'égard de la courbe Σ; elle pourra exiger l'intervention d'une nouvelle courbe auxiliaire Σ'', qui elle-même pourra dépendre d'une courbe Σ''', et ainsi de suite. Mais la difficulté de ces déterminations successives ira sans cesse en diminuant avec le nombre des points de la C_m qu'on aura à considérer sur chaque transversale oL.

Le nombre des points d'intersection de Σ' et de C_m, diminué, s'il y a lieu, à raison des points multiples de Σ' et des points étrangers à la question, fera connaître le nombre des transversales qui satisfont à la question auxiliaire, et par conséquent le nombre P qu'il fallait trouver.

4. La solution du problème proposé est ainsi indiquée d'une manière générale, et avec autant de précision que le comporte l'indétermination de la fonction (F) qui est comprise dans son énoncé.

Elle s'applique évidemment aussi au problème corrélatif, par voie de dualité. Mais elle suppose essentiellement que la courbe C_m est une courbe propre du degré m. Si cette courbe se fractionne en courbes de degrés inférieurs, la formule ci-dessus n'est plus applicable en général, et on devra, dans chaque cas, recourir à des déterminations particulières, basées d'ailleurs sur les mêmes principes.

§. 2.

Applications de la méthode précédente.

5. Comme première application de la méthode qui vient d'être exposée, supposons que la fonction (F) soit $\frac{ab}{ac} = \lambda$; c'est-à-dire: on demande ***quel est le lieu de la transversale qui coupe une courbe C_m en trois points tels, que les distances de l'un aux deux autres soient dans un rapport donné?***

Ce problème est un cas particulier du suivant:

Quel est le lieu de la transversale qui coupe une courbe C_m en trois points a, b, c, et une droite fixe M en un point μ, de telle sorte qu'on ait toujours la relation

$$\frac{\mu b}{\mu c} : \frac{ab}{ac} = \lambda\ ?$$

Car si la droite M passe à l'infini, cette relation anharmonique devient celle qui est proposée.

On a ici

$$n = 3; \quad Q = \tfrac{1}{2} m(m-1); \quad N = 6;$$

d'où

$$QN = 3m(m-1).$$

En effet, sur une transversale quelconque oL, chaque combinaison d'un segment ab de C_m avec le point d'intersection μ de oL et de M, donne lieu à six points x tels, que l'un des rapports anharmoniques des quatre points a, b, x, μ, est égal à la constante donnée λ.

Il s'agit actuellement de déterminer P, c'est-à-dire le nombre de fois que le point x coïncide avec le point o.

Or le lieu Σ' d'un point y tel, que les quatre points o, a, y, μ, dont l'un a appartient à C_m, donnent lieu à un rapport anharmonique égal à λ, est du degré $6m$. Cette courbe coupe C_m en un nombre de points équivalent à $6m^2$. Mais Σ' a, sur C_m, des points multiples qui donnent lieu à des transversales étrangères à la question.

En effet, considérons l'un des m points de rencontre de C_m et de M. Appelons i ce point, en tant qu'appartenant à C_m, et μ en tant qu'appartenant à M. Les 6 positions du point y, dont chacun, étant associé aux trois points o, i, μ, donne un rapport anharmonique égal à λ, sont coïncidentes au point i, qui est par conséquent un point sextuple de la courbe Σ' situé sur C_m. Pourtant la transversale oi ne satisfait pas à la question, puisqu'on n'a à y considérer que deux points distincts a, i, au lieu de trois qui sont requis par l'énoncé de la question.

Donc le nombre des points utiles d'intersection de Σ' et de C_m se réduit à $6m^2-6m=6m(m-1)$, et ces points ne donnent lieu qu'à $3m(m-1)$ transversales distinctes, parcequ'ils sont, d'après la nature même de la question, situés, deux à deux, sur des droites concourantes en o.

Donc enfin $P=3m(m-1)$, et le degré de Σ, c'est-à-dire

$$QN+P = 6m(m-1).$$

Ce lieu coupe C_m en un nombre de points équivalent à $6m^2(m-1)$. Mais il est aisé de voir que le nombre des points d'intersection distincts et répondant à la question est, en réalité, moindre de $T=12m(m-1)$, à cause des particularités qui se présentent aux $m(m-1)$ points de contact des tangentes à C_m, issues du point o, points de contact dont chacun est sextuple sur la courbe Σ, et aux m points de rencontre de C_m avec M, dont chacun est $6(m-1)^{\text{tuple}}$ sur Σ. Ces points d'ailleurs ne donnent lieu, ni les uns ni les autres, à des transversales qui satisfassent à la question. Donc on a $m(QN+P)-T=6m(m-1)(m-2)$; et comme ces points d'intersection sont situés, trois à trois, sur des droites concourantes en o, le nombre des trans-

versales distinctes qui résolvent le problème, c'est-à-dire la *classe* de la courbe cherchée, est simplement $2m(m-1)(m-2)$.

Remarque. Le cas particulier où la constante λ a la valeur -1, c'est-à-dire où l'un des points d'intersection de la transversale avec la courbe est le milieu de deux autres, a été traité par M. *Steiner,* page 346 du mémoire déjà cité. Le résultat énoncé par le savant géomètre est alors $m(m-1)(m-2)$. On y parvient par une voie toute semblable à celle que je viens d'indiquer. On trouve en outre, sans difficulté, que la courbe touche la courbe donnée en ses $3m(m-2)$ points d'inflexion, qu'elle a la droite de l'infini pour tangente $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)^{\text{tuple}}$, et les asymptotes de la courbe C_m pour tangentes $2(m-2)^{\text{tuples}}$ et pour asymptotes $(m-2)^{\text{tuples}}$.

6. En second lieu, supposons que la fonction (F) soit la fonction anharmonique de quatre points. On a ce théorème:

Le lieu d'une transversale qui coupe une courbe C_m du degré m en quatre points donnant lieu à un rapport anharmonique λ (λ étant différent de 0, de $+1$ et de -1) *est de la classe*

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3).$$

On a ici $n=4$, $N=6$, $Q=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$. Pour connaître la valeur de P, il faut résoudre cette autre question:

Combien peut-on mener, par le point o, de transversales distinctes telles, que trois des points de rencontre de chacune d'elles avec la courbe et le point o donnent lieu à un rapport anharmonique égal à λ?

Le lieu Σ' d'un point y tel, que l'un des rapports anharmoniques des quatre points $o, a, b, y,$ dont deux, a et b, appartiennent à la C_m, soit égale à λ, est du degré $3m(m-1)$; parceque chaque combinaison d'un segment ab avec le point o donne lieu à six points y, et que d'ailleurs le point y ne peut jamais se trouver en o.

Ce lieu coupe C_m en $3m^2(m-1)$ points. Mais tous ne donnent pas lieu à des transversales satisfaisant à la question.

Car soit α l'un des points de contact d'une tangente à C_m issue de o; deux points a et b de C_m coïncident en ce point; et les six positions du point y telles, que les quatre points o, a, b, y donnent lieu à un rapport anharmonique égal à λ, coïncident en α. Le point α appartient donc six fois à la courbe Σ', sans que la droite $o\alpha$ satisfasse à la question, puisqu'on n'a à y considérer que deux points a, b de C_m, au lieu de trois qui sont requis

par les conditions de la question. Le nombre des intersections utiles de C_m et de Σ se réduit donc à

$$3m^2(m-1)-6m(m-1) = 3m(m-1)(m-2).$$

Mais ces points sont situés, trois à trois, sur des droites concourantes en o. Car si o, a, b, c sont quatre points en ligne droite satisfaisant à la question, il est évident que chacun des trois points a, b, c détermine la même transversale oa. Ainsi le nombre de ces droites n'est, en réalité, que

$$m(m-1)(m-2);$$

et tel est parconséquent l'ordre de multiplicité du point o sur la courbe Σ; c'est-à-dire que telle est la valeur cherchée de P.

Le degré de Σ est donc $2m(m-1)(m-2)$. Cette courbe coupe C_m en un nombre de points équivalent à $2m^2(m-1)(m-2)$. Mais il faut chercher la valeur de T, dont ce nombre théorique doit être diminué.

Or si α est un point de contact d'une tangente à C_m, issue du point o, ce point est $6(m-2)^{\text{tuple}}$ sur la courbe Σ. Car appelons a, b les deux points de C_m qui coïncident en α, et soit c l'un des $(m-2)$ autres points de C_m situés sur le tangente $o\alpha$. Les six positions du point x tel, que le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, x soit égal à λ, tombent en α, et pourtant la droite $o\alpha$ ne satisfait pas à la condition requise de couper C_m en quatre points distincts dont l'un des rapports anharmoniques soit égal à λ. Cette circonstance se présente, sur chacune des $m(m-1)$ tangentes, pour chacun des $(m-2)$ points de C_m autres que le point de contact; donc $T=6m(m-1)(m-2)$, et l'on a pour le nombre des intersections de Σ et de C_m

$$2m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Ces points sont situés, quatre à quatre, sur $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ transversales distinctes; ce qui démontre le théorème énoncé.

7. Dans le cas où la valeur du rapport anharmonique donné est -1, c'est-à-dire quand les quatre points doivent être en rapport harmonique, la *classe* de la courbe est moins élevée, parce que trois des six rapports sont égaux à leurs inverses.

On trouve, dans ce cas, par des considérations analogues,

$$Q=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3};\quad N=3;\quad P=\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)\ \text{ et }\ T=3m(m-1)(m-2);$$

donc *la classe de la courbe enveloppe d'une transversale qui coupe une C_m en quatre points harmoniques est* $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$, résultat énoncé par

M. *Steiner*, page 351 du mémoire cité plus haut, et dont la démonstration, parfaitement analogue à celle qui précède, serait ici superflue.

8. Remarques. 1°. M. *Steiner* propose comme problème de déterminer le degré de ce lieu, ce qui revient à déterminer le nombre de ses tangentes doubles, c'est-à-dire combien de fois il arrive que, sur une même transversale, deux points de la courbe divisent harmoniquement à la fois deux segments distincts interceptés par la courbe sur cette transversale. Je donnerai ci-après (12. remarque) quelques considérations sur la solution de cette difficile question.

2°. Le point de contact de chaque transversale avec son enveloppe est aisé à construire dans les deux courbes dont il vient d'être question, et qui peuvent être appelées *courbes enveloppes des rapports anharmoniques ou harmoniques*.

Pour la première, par exemple, soient a, b, c, d les quatre points en rapport anharmonique donné, situés sur la transversale L dont on cherche le point de contact i. Soient A, B, C, D les tangentes à C_m en ces quatre points. On sait (*Géom. sup.* n°. 552) que l'enveloppe d'une droite, qui coupe quatre droites fixes en quatre points, dont l'un des rapports anharmoniques est constant, est une conique. Donc le point cherché i n'est autre que le point de contact de L avec la conique déterminée par les cinq tangentes A, B, C, D, L: question facile à résoudre.

3°. Le théorème qui vient d'être invoqué (*Géom. sup.* 552) prouve aussi que si la C_m se décompose en m droites, la courbe enveloppe se décompose elle-même en autant de fois six coniques qu'il y a de combinaisons des m droites, quatre à quatre, c'est-à-dire en $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ coniques, etc.

4°. Soit $m=4$, la courbe enveloppe des rapports harmoniques est de la sixième classe et parconséquent du trentième degré.

Mais si cette courbe de 4e ordre se fractionne en quatre droites, l'enveloppe se réduit aux trois coniques harmoniques inscrites au quadrilatère formé par les quatre droites. Examinons encore le cas où la C_4 se compose de deux coniques C_2, C_2'; et montrons, par cet exemple, comment les raisonnements généraux doivent être modifiés dans les cas particuliers. Par un point quelconque o, pris dans le plan des deux coniques, menons une transversale arbitraire oL, qui coupe C_2 en a et b, et C_2' en c et d. Si l'on associe successivement les points a et b au point c et au point d, on obtient, sur oL,

deux quatrièmes harmoniques x, x'. En outre ce quatrième harmonique tombe deux fois en o; et ce cas arrive, quand la transversale oL passe par l'un ou l'autre des points de rencontre de C_2' par la polaire du point o par rapport à C_2. Ainsi le lieu des points x est du quatrième ordre; il coupe C_2' en huit points; mais il passe deux fois par chacun des points de contact des tangentes à C_2' issues du point o, et pourtant ces tangentes sont évidemment étrangères à la question. Donc le nombre des points utiles se réduit à quatre, et ne donne lieu qu'à deux transversales distinctes, en sorte que l'enveloppe est une conique, comme on le démontre par d'autres considérations.

9. *Le lieu d'une transversale qui coupe une courbe C_m en cinq points a, b, c, d, e, tels, que l'un d'eux soit le point central de l'une des involutions déterminées par les quatre autres, est une courbe de la classe*

$$\tfrac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).$$

Cette question peut être envisagée de deux manières différentes, qui donnent lieu à deux solutions, distinctes dans la forme, mais d'ailleurs identiques quant au résultat. Si je les présente ici l'une et l'autre, c'est parceque cette variété d'applications donne lieu incidemment à quelques propositions intéressantes.

Première solution. Si e est le point central, on peut le désigner par cette propriété, que le produit de ses distances à deux points conjugués de l'involution est constant. On aura donc ici:

$(F) = ea.eb - ed.ec = 0$;

$N = 3$, parceque les quatre points a, b, c, d, donnent lieu à trois combinaisons distinctes de deux segments;

$Q = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$, nombre des combinaisons distinctes de m points quatre à quatre;

d'où $QN = \frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$.

Il faut déterminer P, c'est-à-dire le nombre de fois que le point o est lui-même le point central d'une involution déterminée, sur la transversale tournante oL, par quatre points de C_m.

Chaque point c, associé à un segment ab, donne lieu à un seul conjugué y tel, qu'on ait $oc.ox = oa.ob$. Ainsi on a d'abord, sur oL, $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ points y du lieu Σ'. Mais cette courbe passe plusieurs fois en o. Car si la transversale oL est menée parallèlement à une asymptote de C_m, et qu'on prenne le point c_∞ de C_m, son conjugué y est au point o. Cette circonstance

se présente, sur cette transversale, relativement à $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ segments ab. Donc le point o de la courbe Σ' est multiple de l'ordre $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$, et par conséquent cette courbe est du degré $m(m-1)(m-2)$.

Σ' coupe C_m en un nombre de points équivalent à $m^2(m-1)(m-2)$, mais qu'il y a lieu de diminuer.

En effet, soient a, b les deux points de C_m infiniment voisins l'un de l'autre au point de contact d'une tangente issue du point o; c un troisième point de C_m. On a $oa.oc = ob.oc$. Ainsi le conjugué du point a, dans l'involution déterminée par le point central o et par le segment bc, tombe au point c. Mais on a pareillement $ob.oc = oa.oc$, c'est-à-dire que le conjugué du point b, dans l'involution déterminée par le point central o et le segment ac, tombe aussi en c. Ainsi ce point est un point double de la courbe Σ', et il y en a $(m-2)$ semblables sur chaque tangente, qui équivalent, en totalité, à $2m(m-1)(m-2)$ intersections simples avec C_m.

Soit, en outre, c_∞ un point de C_m situé à l'infini; la relation $oa.oy = ob.oc_\infty$, donne $oy = \infty$; ainsi le conjugué du point a tombe en c_∞; et cette circonstance se présente $(m-1)(m-2)$ fois sur chaque transversale parallèle à une asymptote de C_m. Le point c_∞ est donc un point $(m-1)(m-2)^{\text{tuple}}$ de Σ', et pourtant la transversale, à laquelle il donne lieu, ne satisfait pas à la question. Il faut donc encore retrancher, du nombre théorique des intersections de Σ' et de C_m, $m(m-1)(m-2)$.

Donc enfin le nombre de ces intersections distinctes et utiles est $m^2(m-1)(m-2)-3m(m-1)(m-2) = m(m-1)(m-2)(m-3)$ qui sont situés évidemment, quatre à quatre, sur des droites concourantes en o, et ne donnent lieu par conséquent qu'à $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ transversales satisfaisant à la question. On a donc enfin

$$P = \tfrac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3), \quad \text{d'où}$$
$$QN+P = \Sigma = \tfrac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Σ coupe C_m en un nombre de points équivalent à $\frac{3}{8}m^2(m-1)(m-2)(m-3)$; mais il faut chercher T. Or soit ab le point de contact d'une tangente à C_m issue du point o. Si c, d sont deux autres points de C_m sur la tangente, on a $da.dc = db.dc$. Ainsi d appartient à la courbe Σ, sans qu'il satisfasse à la question proposée, et ce cas d'exception se présente $m(m-1)(m-2)(m-3)$ fois.

En outre, si oL est parallèle à une asymptote de C_m, et passe par le point d_∞ de cette courbe, la relation $ac.ax = ab.ad_\infty$ donne $ax = \infty$; et le conjugué de c tombe en d_∞. Le point a est donc le point central de l'in-

volution déterminée par les deux segments de C_m, bd_∞, cd_∞; mais ce point, situé sur Σ, ne satisfait pas à la question; car la relation d'involution n'a lieu qu'entre quatre points, au lieu de cinq qui sont exigés. On a donc encore ainsi $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ cas d'exception, et enfin $T=\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$. D'où $m(QN+P)-T=\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$.

Chacun de ces points d'intersection donne lieu à une transversale distincte. Car, par la nature de la fonction (F), les cinq points a, b, c, d, e ne jouent pas le même rôle, et ne peuvent pas se changer l'un dans l'autre, et il n'y a qu'un seul d'entre eux qui réponde aux conditions de la question.

Ainsi la *classe* de la courbe cherchée est

$$\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Seconde solution. Le point central de l'involution déterminée par deux segments ab, cd peut être défini comme étant, dans cette involution, le conjugué du point situé à l'infini. Cette considération fournit une seconde manière de présenter la solution de la question proposée.

Pour plus de généralité, supposons d'abord qu'on demande *quelle est la classe de l'enveloppe d'une transversale qui coupe une courbe C_m en cinq points a, b, c, d, e, et une droite fixe M en un point μ, tels, que les six points a, b, c, d, e, μ soient en involution?*

Pour cela, cherchons le lieu Σ du conjugué x du point μ, par rapport à l'une des trois involutions déterminées par quatre points a, b, c, d de C_m. On a ici·

$$Q=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \quad \text{et} \quad N=3, \quad \text{d'où}$$

$$QN=\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Il s'agit de déterminer P.

Cherchons le lieu Σ' du conjugué y d'un point c de C_m par rapport à l'involution déterminée par les deux segments $o\mu$, ab. On a d'abord $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ points y sur chaque transversale oL. Mais le point y tombe en o, quand le point c se trouve à la fois sur C_m et sur M, et cela relativement à chacun des $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ segments ab qu'on peut former, sur la droite $o\mu$, avec les $(m-1)$ points de C_m, autres que c, qui s'y trouvent. Le point o est donc un point $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)^{\text{tuple}}$ sur Σ', et le degré de cette courbe est $m(m-1)(m-2)$.

Elle coupe C_m en un nombre de points équivalent à $m^2(m-1)(m-2)$. Mais le nombre réel des intersections utiles est moindre. Car si $o\mu$ est tangente à C_m en ab, et qu'on considère l'involution déterminée par les deux segments μo, ac, le point b a pour conjugué le point c; et si l'on considère ensuite l'involution déterminée par les segments μo, bc, le conjugué du point a tombe aussi en c. Le point c, qui d'ailleurs donne lieu à une transversale (c'est la tangente) étrangère à la question, est donc un point double; il en est de même des $(m-3)$ autres points d, e, f, etc. Σ' a donc, en tout, $2m(m-1)(m-2)$ points doubles sur C_m, par cette seule considération.

En outre, si la transversale oL passe par l'un des points de rencontre de M et de C_m, le point μ est un point a de C_m. Le conjugué du point c, dans l'involution déterminée par les segments μo, ab est le point a; et cette coïncidence a lieu pour chacun des points d, e, f, etc., c'est-à-dire $(m-2)$ fois. Pareillement, le conjugué du point b dans l'involution μo, ac est le point a, et cela arrive aussi $(m-2)$ fois. Donc le point a de C_m est autant de fois $(m-2)^{\text{tuple}}$ sur la courbe Σ', qu'il y a sur oa de points de la C_m autres que a; c'est-à-dire qu'il est $(m-1)(m-2)^{\text{tuple}}$, et pourtant la transversale oa ne satisfait pas à la question. Ainsi cette seconde considération fournit encore $m(m-1)(m-2)$ cas d'exception; et le nombre utile des intersections de Σ' et de C_m se réduit enfin à

$$m^2(m-1)(m-2)-3m(m-1)(m-2) = m(m-1)(m-2)(m-3),$$

qui ne donnent lieu évidemment qu'à $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ transversales distinctes; car les points sont situés, quatre à quatre, sur des droites concourantes en o.

Donc $P=\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$, et le degré de Σ ou

$QN+P=\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$.

Pour trouver T, supposons que la transversale $o\mu$ soit tangente à C_m en ab.

Le conjugué du point μ dans l'involution bd, ac est le point a; et le conjugué de ce même point dans l'involution ad, bc, est encore le point a. Ainsi a est un point double de Σ, à l'égard de chaque segment cd, donc $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ fois. Ainsi cette considération fournit $m(m-1)(m-2)(m-3)$ cas d'exception.

Actuellement si la transversale passe en un point d de rencontre de M avec C_m, le conjugué du point μ, dans l'involution ab, cd, est le point c; on aura donc $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)$ cas d'exception sur od, et, en totalité,

$\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ pour les m droites telles que od. Donc enfin

$$T = \tfrac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3), \quad \text{et}$$

$$m(QN+P)-T = \tfrac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4);$$

chacun de ces points d'intersection ne donne lieu qu'à une seule transversale issue du point o; telle est la *classe* de la courbe cherchée.

Si M est la droite située à l'infini, le conjugué du point μ est le point central d'une des involutions déterminées par les quatre autres points. On obtient donc, par cette seconde solution, le même résultat que par la première.

10. Le lemme suivant, qui sera necessaire plus loin, fait partie des énoncés de M. *Steiner,* dans le mémoire déjà cité, page 343.

Lemme. *La courbe, lieu géométrique du conjugué harmonique d'un point fixe o, par rapport aux segments ab, interceptés sur une courbe C_m par une transversale qui tourne autour du point o, possède* $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *points doubles;* disons, pour abréger, I points doubles.

En d'autres termes, *on peut mener, par le point o, I transversales telles, que, sur chacune d'elles, le point o soit l'un des deux points doubles de l'involution déterminée par deux des segments qu'elle intercepte dans la courbe C_m.*

Pour le démontrer, supposons que ab soit l'un des deux segments, c un troisième point de la C_m situé sur la transversale oab; i le conjugué harmonique du point o par rapport à ab, et x le conjugué harmonique du point c par rapport au segment oi.

Si le point x était sur la courbe C_m, mais d'ailleurs distinct des trois points a, b, c, la transversale $oabc$ serait précisément l'une de celles dont on cherche le nombre; car le point o serait l'un des deux points doubles de l'involution déterminée par les deux segments distincts ab, cx. Cherchons le lieu Σ du point x. Or ce point ne peut jamais se trouver en o, puisque le point o est pris en dehors de la courbe C_m; d'ailleurs chaque segment ab donnant lieu à $(m-2)$ points x, il existe $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ de ces points sur chaque transversale oL. Donc le degré de Σ est $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$.

Ce lieu coupe C_m en un nombre de points équivalent à $\frac{1}{2}m^2(m-1)(m-2)$. Mais tous ne satisfont pas à la question, et, en outre, Σ possède, sur C_m, des points doubles qui diminuent le nombre des intersections effectives.

En effet, supposons que le point i soit sur C_m, ce qui n'arrive qu'aux $m(m-1)$ points de contact α des tangentes à C_m issues du point o, et, en

outre, en $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ autres points β; ces points α et β sont les points d'intersection de la C_m par la courbe $C_{\frac{1}{2}m(m-1)}$, qui est le lieu du conjugué harmonique du point o par rapport aux segments ab de la C_m; on a en effet:

$$\tfrac{1}{2}m^2(m-1) = m(m-1)+\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2).$$

Chacun de ces points β est le conjugué harmonique du point o, par rapport à un certain segment ab de la C_m; mais il est lui-même un certain point c de C_m, dont le conjugué, par rapport à $o\beta$, c'est-à-dire par rapport à oc, est le point c lui même. Ce point, quoiqu'il soit situé sur la courbe Σ, ne donne donc pas lieu à un segment distinct formant avec ab une involution dont o soit l'un des points doubles. Ainsi la transversale $o\beta$ est étrangère à la question; et cette circonstance se présente $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ fois.

Supposons encore que la transversale soit tangente à la C_m en un point α, où coïncident deux points a, b de cette courbe. Si i est le conjugué du point o par rapport au segment ca, le conjugué du point b par rapport au segment oi sera le point o. Le conjugué du point o par rapport au segment cb sera aussi le point i, et le conjugué du point a par rapport à oi sera encore le point c. Ainsi le point c est un point double de la courbe Σ. Il en est de même des $(m-3)$ autres points d, e, f... de rencontre de la tangente oab avec la C_m. Donc le nombre total des points doubles que Σ possède sur C_m est $m(m-1)(m-2)$, et comme ils donnent lieu à des transversales étrangères à la question, il en résulte que le nombre des transversales utiles que ces points déterminent se réduit à

$$\tfrac{1}{2}m^2(m-1)(m-2)-\tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)-m(m-1)(m-2) = \tfrac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3).$$

Mais ces transversales coïncident quatre par quatre; de sorte que le nombre de celles qui sont distinctes est, en réalité, $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$; ce qui démontre le lemme énoncé.

11. Actuellement soit $(F) = ad.ce.eb+bc.ce.ea = 0$. Cette condition donne lieu au théorème suivant:

Le lieu de la transversale qui coupe une courbe C_m en cinq points tels, que l'un d'eux e soit un des deux points doubles d'une des involutions déterminées par les quatre autres a, b, c, d est de la classe $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$.

Cherchons le lieu Σ des *points doubles* x des involutions déterminées, sur chaque transversale oL, par quatre points a, b, c, d de C_m situés sur cette droite. Chaque groupe de quatre points donne lieu à trois involutions

distinctes, savoir: ab, cd; ac, bd; ad, bc; et chacune d'elles donne lieu à deux points x. On a donc, sur oL, $6\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ points x.

En outre, en vertu du *lemme* qui vient d'être démontré, il existe $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ transversales, sur chacune desquelles le point o est précisément l'un des points doubles d'une des involutions déterminées par quatre des points de C_m qui y sont situés.

Donc le degré de Σ est $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3) = \frac{3}{8}\mu$. Ce lieu coupe C_m en $\frac{3}{8}\mu.m$ points. Mais tous ne donnent pas lieu à des transversales satisfaisant à la question. Cherchons le nombre des cas qui font exception.

Soit ab le point de contact d'une tangente à C_m, issue du point o.

Prenons deux autres points c, d de C_m sur la tangente, et supposons que l'ordre successif de ces quatre points soit a, b, c, d.

Ces quatre points donnent lieu aux trois combinaisons suivantes de deux segments, savoir:

$$ab,\ cd;\quad ad,\ bc;\quad ac,\ bd.$$

L'un des deux points doubles de l'involution déterminée par la première combinaison tombe entre les points a, b, c'est-à-dire au point de contact de la tangente.

Les deux points doubles de l'involution déterminée par la seconde combinaison tombent aussi en ce point de contact

Enfin les deux points doubles de l'involution déterminée par la troisième combinaison, où les segments empiètent l'un sur l'autre, sont imaginaires.

Le lieu Σ passe donc trois fois en a, à l'égard de chaque association de deux points c, d avec les deux points infiniment voisins a, b.

Donc le point de contact de la tangente est $\frac{3}{2}(m-2)(m-3)^{\text{tuple}}$ sur la courbe Σ. D'ailleurs la tangente ne satisfait pas à l'énoncé de la question, puisqu'on n'a à y considérer que quatre points au lieu de cinq; et ce cas d'exception se présente $m(m-1)$ fois, à cause des $m(m-1)$ tangentes.

Donc T est ici égal à $\frac{3}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$.

Donc enfin le nombre des intersections utiles de Σ et de C_m est

$$\tfrac{3}{8}\mu' m - \tfrac{3}{2}\mu = \tfrac{3}{8}\mu'(m-4);$$

et comme, par la nature même de la question, chaque point d'intersection donne lieu à une transversale distincte, il s'ensuit que la *classe* de la courbe cherchée est $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$;

résultat conforme à celui que M. *Steiner* a énoncé dans le mémoire déjà cité, page 354, ligne 25.

12. Soit encore $(F) = ad.cf.eb + bc.de.fa = 0$. Cette condition donne lieu au théorème suivant:

Le lieu de la transversale qui coupe une courbe C_m, du degré m, en six points distincts en involution, est de la classe $\frac{1}{18}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$.

Soit x le sixième point qui forme involution avec cinq points de C_m, a, b, c, d, e, situés sur une transversale oL. Cherchons le lieu Σ de ces points x; ses intersections avec C_m donneront les solutions de la question, sauf les cas d'exception qu'il y aura lieu de considérer. On a ici $n = 6$; $N = 15$, parceque cinq points donnent lieu à quinze combinaisons distinctes d'un point avec deux segments, et

$$Q = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5};$$

d'où

$$QN = \tfrac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = \tfrac{1}{8}\mu.$$

Il faut chercher la valenr de P, c'est-à-dire combien de fois le point o est lui-même le sixième point de l'involution à laquelle appartiennent les cinq points a, b, c, d, e de la courbe C_m.

Prenons quatre points a, b, c, d et cherchons le lieu Σ' du point y, conjugué à o dans les trois involutions déterminées par ces quatre points. Chaque groupe quaternaire de points, tel que $abcd$, donne lieu à trois points y. Il existe $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ de ces groupes.

Donc on a, sur oL, $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ points distincts y. En outre, en vertu du lemme démontré plus haut, il arrive $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ fois que le conjugué du point o tombe au point o lui-même. Donc la courbe Σ' est du degré

$$\tfrac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3) = \tfrac{1}{4}\mu'.$$

Elle coupe C_m en un nombre de points équivalent à $\frac{1}{4}\mu'm$. Mais il y a des cas d'exception qu'il faut chercher.

Soit ab le point de contact d'une tangente à C_m, issue du point o; et c, d deux autres points de C_m situés sur la tangente. Le conjugué du point o, dans l'involution ac, bd, est a. Il est encore a, dans l'involution ad, bc. Donc a est un point double de Σ', par rapport à chaque combinaison telle que ab, cd, et pourtant il ne donne pas lieu à une transversale satisfaisant à

la question. Ce cas d'exception, qui se présente deux fois pour chaque segment cd, a donc lieu $(m-2)(m-3)$ fois à l'égard de chaque tangente, donc, en totalité, $m(m-1)(m-2)(m-3)$ fois.

Donc enfin le nombre des intersections utiles de Σ' et de C_m est $\frac{1}{4}\mu' m-\mu' = \frac{1}{4}\mu'(m-4)$; et, comme chacun de ces points d'intersection donne lieu, par la nature même de la question, à une transversale distincte, le nombre de ces droites, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité P du point o, est

$$\tfrac{1}{4}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = \tfrac{1}{4}\mu.$$

On a donc, pour le degré de Σ,

$$QN+P = \tfrac{3}{8}\mu.$$

Ce lieu coupe C_m en un nombre de points équivalent à $\frac{3}{8}\mu m$ points.

Mais d'abord, Σ possède, sur C_m, un nombre de points doubles qui, d'après le théorème précédent, est égal à $\frac{3}{8}\mu$, et dont chacun donne lieu à une transversale qui ne satisfait pas à la question.

En second lieu, considérons ce qui se passe sur chacune des tangentes à C_m, issues du point o. Soit ab le point de contact d'une de ces tangentes; c, d, e trois autres points de C_m sur cette droite. Le conjugué du point e, dans les deux involutions ac, bd et ad, bc est le point a lui-même. Cette particularité se présente $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m-4)$ fois sur chaque tangente, et y donne lieu à $(m-2)(m-3)(m-4)$ cas d'exception, puisque le point a est, chaque fois, un point double. Donc, en totalité, $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)=\mu$ cas d'exception.

En outre, le conjugué du point a dans les trois involutions bc, de; bd, ce; be, cd, tombe, respectivement, en c, d, e. Ces points appartiennent donc à la courbe Σ, et pourtant ils ne donnent pas lieu à des transversales satisfaisant à la question, puisqu'on n'a à y considérer que cinq points, au lieu des six qu'exige l'énoncé du théorème. Chaque combinaison distincte de trois points, tels que c, d, e, avec ab, fournit donc trois cas d'exception. Donc ces cas sont, en totalité, sur les $m(m-1)$ tangentes, au nombre de

$$3 \cdot \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3} \cdot m(m-1) = \tfrac{1}{2}\mu.$$

Réunissant les cas d'exception, qui proviennent des trois considérations précédentes, on trouve enfin

$$T = \tfrac{3}{8}\mu+\mu+\tfrac{1}{2}\mu = \tfrac{15}{8}\mu.$$

Donc le nombre utile des intersections de Σ et de C_m se réduit à

$$\tfrac{3}{8}\mu m-\tfrac{15}{8}\mu = \tfrac{3}{8}\mu(m-5).$$

Il est évident d'ailleurs que ces point sont situés, six par six, sur des droites concourantes en o. Donc le nombre des transversales distinctes qui satisfont à la question, c'est-à-dire la *classe* de la courbe cherchée est enfin

$$\frac{3}{6.8}\mu(m-5) = \frac{1}{16}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5),$$

ce qu'il fallait démontrer. Cette courbe a pour tangente $(m-3)(m-4)(m-5)^{\text{tuple}}$ chacune des tangentes d'inflexion de la courbe donnée C_m.

Remarque. On sait (*Chasles,* Géom. sup. 207) que si e, f sont les *points doubles* d'une involution déterminée par les couples de points a, b et c, d, ces points, conjugués entre eux, forment une involution de six points avec les couples de points a, c et b, d et aussi avec les couples a, d et b, c.

Donc les transversales dont il a été question ci-dessus (7, remarque) et sur chacune desquelles deux points de C_m divisent harmoniquement à la fois deux segments interceptés sur cette courbe par la transversale, sont des tangentes doubles de la courbe enveloppe des six points en involution.

Ces transversales sont aussi tangentes aux courbes enveloppes des n°s 7 et 11 ci-dessus. Donc elles font partie des tangentes communes à ces trois courbes, ce qui fournit une limite supérieure que leur nombre ne saurait dépasser, ni même atteindre, puisqu'il faudrait en déduire au moins le nombre des tangentes de C_m sur lesquelles un point de la courbe est le conjugué harmonique du point de contact par rapport à deux points d'intersection; tangentes évidemment étrangères à la question et dont le nombre est déterminé ci-après (15.).

13. Examinons quelques cas particuliers de la question générale qui vient d'être traitée (12).

Si la C_m est du sixième ordre, la courbe enveloppe des transversales qui la coupent en six points en involution est de la 45e *classe.*

Mais cette classe est bien moins élevée, si la courbe se fractionne en courbes d'un degré moindre, et que, par suite, certaines conditions soient imposées relativement à la manière dont les points doivent être conjugués deux à deux dans l'involution. Supposons que la C_6 se compose de trois coniques C_2, C_2', C_2''. Si l'on fait tourner une transversale oL autour d'un point o, on reconnait aisément que le lieu d'un point conjugué à l'un des points d'intersection de oL et de C_2'', dans l'involution que déterminent les deux segments interceptés par oL sur C_2 et C_2', est une courbe du sixième ordre Σ, qui coupe C_2'' en douze points. Mais six de ces points sont, comme on va le voir,

étrangers à la question. En effet, si l'on cherche le lieu des ***points doubles*** de l'involution déterminée par les deux segments que la transversale tournante intercepte sur les deux coniques C_2, C_2', on trouve que c'est une courbe du troisième ordre. Car, sur chaque droite oL, on a deux points de ce lieu, et, si l'on conçoit la conique déterminée par la condition de passer par le point o et par les quatre points d'intersection de C_2 et C_2', sa tangente en o est la seule direction de la transversale pour laquelle l'un des deux points doubles, dont on cherche le lieu géométrique, puisse se trouver en o. Ce lieu est donc du troisième ordre, et il coupe C_2'' en six points α. Considérons l'un de ces points. Il appartient nécessairement à la courbe Σ; car la droite $o\alpha$ détermine, sur les trois coniques, une involution; mais comme cette involution a un point double en α, elle n'a lieu qu'entre cinq points, au lieu de six, et parconséquent la transversale $o\alpha$ est étrangère à la question. Les points d'intersection de Σ et de C_m sont ainsi réduits à six; et, comme ils se trouvent, deux à deux, sur des droites concourantes en o, il n'existe, en réalité, que trois transversales, issues du point o, qui remplissent les conditions du problème énoncé. Ainsi la courbe enveloppe est de troisième classe.

Le théorème corrélatif de celui-ci, par voie de dualité, a été démontré analytiquement par M. *Cayley*, dans le tome X du *journal de Mathématiques* de M. *Liouville*, page 104.

Supposons, en second lieu, que la C_m se compose de six droites. Si les six droites sont conjuguées deux à deux, la courbe enveloppe d'une droite qui les coupe en six points en involution est une courbe de troisième classe; ce qui se démontre comme dans le cas précédent. Mais si la manière dont ces droites doivent être associées n'est pas désignée, le lieu se compose, en totalité, de quinze courbes de troisième classe, et le lieu complet est, comme dans le cas général, de la 45[e] classe. Donc si la C_m se compose de m droites, l'enveloppe se fractionne en $15\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5}$ courbes de troisième classe.

Si l'on fait la figure corrélative, dans le cas de six droites, on retrouve un théorème connu, savoir: ***Quand six points, situés dans un même plan, sont conjugués deux à deux, le lieu d'un point, d'où on les voit suivant trois angles en involution, est une courbe du troisième ordre.***

Le théorème concernant les six droites fournit un moyen de trouver le point de contact de chaque transversale, qui coupe une C_m générale en six points en involution, avec son enveloppe.

Car soient a, b, c, d, e, f les six points qui jouissent de cette propriété sur la transversale L dont il s'agit. On mènera les tangentes à C_m en ces six points, lesquelles détermineront dans les conditions présentes, comme on l'a vu ci-dessus, une courbe enveloppe de la troisième classe. Le point de contact de L avec cette courbe sera le point cherché.

14. Les exemples qui précèdent me semblent suffisants pour bien faire connaître l'esprit de la méthode qui convient à la solution de ce genre de questions, et la manière d'en faire l'application dans chaque cas particulier. Je ne les multiplierai donc pas davantage.

§. 3.

15. Je consacrerai ce dernier paragraphe à la solution d'un problème que M. *Steiner* propose à ses lecteurs, et qui fait partie des *desiderata* de son Mémoire.

Ce problème, auquel j'ai fait allusion à la fin de la *remarque* du n° 12 ci-dessus, est énoncé par l'illustre Géomètre en ces termes:

> *Déterminer le lieu Σ des quatrièmes points harmoniques a conjugués, sur chaque tangente S d'une courbe algébrique C_m du degré m, au point de contact a, par rapport à tous les couples de deux points qu'on peut former des $m-2$ points d'intersection $b, c, d, \ldots$ de la tangente S et de la courbe.* (V. page 354 de la traduction de M. *Woepcke*.)

Je vais prouver que ce lieu est du degré $\frac{1}{2}m(m-2)[m(m+1)-12]$; mais, pour cela, il est nécessaire de rappeler les deux lemmes suivants, savoir:

> Lemme I. *Le lieu du conjugué harmonique d'un point fixe, par rapport à tous les couples de deux points interceptés par une courbe C_m sur une transversale qui pivote autour du point fixe, est une courbe Σ' du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.*

Ce théorème, énoncé par M. *Steiner,* page 343 du mémoire précité, est très facile à démontrer. On voit ensuite aisément que, si le point fixe se meut sur une droite L, les courbes Σ', qui correspondent une à une à ses diverses positions, forment, non pas un *faisceau,* mais une *série* de telle nature que, par un point quelconque P du plan, il passe en général $\frac{1}{2}m(m-1)$ de ces courbes Σ', que j'appelerai les *courbes harmoniques* des points de la droite L.

En effet, pour que la courbe harmonique d'un point μ de L passe par le point P, il faut évidemment que la courbe harmonique du point P passe

en μ. Donc il y a, sur L, autant de points satisfaisant à la question, qu'il y a d'unités dans le degré de la courbe harmonique du point P; donc $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Cela étant, il s'ensuit que les courbes harmoniques des points de L forment ce que j'ai appelé une *série d'indice* $\frac{1}{2}m(m-1)$, dans un mémoire inséré au tome VI (2[e] série) du Journal de *Liouville* (1861).

Lemme II. *Quand les courbes C_m d'un faisceau de degré m correspondent, une à une, aux courbes C_n d'une série d'indice N, le lieu des points d'intersection de deux courbes correspondantes est une courbe de degré $Nm+n$.*

La démonstration de ce lemme se conclut sans difficulté de celle que j'ai donnée, pour un cas plus général, dans l'article du Journal de *Liouville* déjà cité, §. VI.

Cela posé, pour trouver le degré du lieu Σ', qui fait l'objet du problème proposé, il suffit de déterminer combien ce lieu possède de points sur une droite quelconque L. Or quand un point α de L appartient à la courbe Σ, l'un a des points de contact des tangentes à C_m issues du point α se trouve sur la courbe harmonique Σ' relative au point α; mais ce point se trouve en même temps sur la courbe première polaire du point α par rapport à C_m; donc il est l'un des points d'intersection de ces deux courbes.

Si le point α se meut sur L, les courbes polaires C_{m-1} forment un faisceau, tandisque les courbes harmoniques $\Sigma'_{\frac{1}{2}m(m-1)}$ correspondantes forment une série *d'indice* $\frac{1}{2}m(m-1)$ [lemme I.]; donc [lemme II.] les courbes polaires et les courbes harmoniques correspondantes se coupent sur une courbe U du degré

$$\tfrac{1}{2}m(m-1).(m-1)+\tfrac{1}{2}m(m-1) = \tfrac{1}{2}m^2(m-1).$$

Mais la courbe U se décompose en deux parties, savoir, la courbe C_m elle-même, et une courbe W du degré $\frac{1}{2}m^2(m-1)-m = \frac{1}{2}m(m+1)(m-2)$. Car soit μ un point de L; les $m(m-1)$ points de contact des tangentes à C_m, issues du point μ, appartiennent en même temps à la courbe polaire et à la courbe harmonique de ce point, sans toutefois satisfaire à la question. Quand le point μ parcourt la droite L, ces points de contact deviennent successivement tous les points de C_m; donc C_m est une branche du lieu U, étrangère à la question proposée.

Actuellement il est clair que, si a est un point d'intersection des courbes W et C_m, la tangente à C_m en a coupe L en un point α qui est le conjugué de a par rapport à deux points d'intersection b, c de C_m par cette tangente. Donc le nombre de fois *distinctes* que cette circonstance a lieu est précisément celui des rencontres de L et du lieu cherché Σ, et il exprime le degré de ce lieu.

Le nombre des intersections des courbes W et C_m est équivalent à $\frac{1}{2}m^2(m+1)(m-2)$. Mais tous ces points ne donnent pas lieu à des tangentes distinctes. Car soit i un point d'inflexion de C_m; ce point compte pour trois dans le nombre des intersections des deux courbes, et pourtant il ne donne lieu qu'à une seule tangente et à un seul point α sur L. Donc le nombre ci-dessus doit être diminué de deux unités pour chaque point d'inflexion, c'est-à-dire, en totalité, de $6m(m-2)$, et il vient enfin, pour le degré de Σ, $\frac{1}{2}m(m-2)[m(m+1)-12]$; ce qu'il s'agissait de trouver.

16. Si $m=4$, le lieu est du 32e degré. Ce résultat, en ce qui concerne le cas de $m=4$, était connu (*Voir* le mémoire de M. *Steiner*, en *note* au bas de la page 328 de la traduction française), et l'auteur ajoute, ce qui est évident, que ce lieu C_{32} a, avec C_4, des contacts du second ordre en chacun de ses vingt-quatre points d'inflexion, et qu'il passe une fois par chacun des cinquante-six points de contact de ses tangentes doubles.

Mais, comme ce problème général, qui vient d'être traité (15.), n'était pas résolu, il serait possible que la connaissance du degré de ce lieu résultât indirectement de celle du nombre des points d'inflexion et des points de contact des tangentes doubles de la courbe du quatrième ordre, points qui sont les seuls par lesquels cette courbe du 32e degré puisse passer sur C_4.

Ici ce théorème, cas particulier d'un autre plus général, est établi *a priori*. Il peut donc servir (le nombre des points d'inflexion étant supposé connu) à déterminer le nombre et la position des points de contact des tangentes doubles de la courbe du 4e ordre; ce qui fournit une solution nouvelle et très directe de cette question, bien connue d'ailleurs, et que j'ai moi-même traitée d'une manière très différente, dans l'article précité du *Journal de Liouville*.

Si $m=5$, le lieu est du 135e degré; il coupe C_5 en 675 points, savoir: Il a avec C_5 des contacts du second ordre sur deux branches en chacun de ses 45 points d'inflexion, qui représentent parconséquent déjà 270 points d'intersection; il passe par les 240 points de contact des 120 tangentes doubles de C_m; enfin il coupe C_5 en 165 points b conjugués harmoniques des points de contact a des 165 *tangentes harmoniques* de C_5, par rapport aux deux autres points c, d d'intersection de chacune de ces tangentes avec la courbe; ce qui donne un total de $270+240+165=675$. Etc.

Paris, 10 Juillet 1861.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$.

(Von Herrn *C. Neumann* zu Halle.)

§. 1.

Angabe des Problems: Allgemeinere Behandlung desselben nach Analogie der Greenschen Methode: Einführung der „Greenschen Function" und der mit dieser correspondirenden Randbelegung.

Dem Probleme, den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers zu bestimmen, wenn die Temperatur seiner Oberfläche in beliebiger Weise gegeben und unveränderlich ist, kann ein anderes Problem zur Seite gestellt werden, welches in Bezug auf die *Ebene* denselben analytischen Charakter darbietet wie jenes in Bezug auf den *Raum*. Dieses Problem der Ebene ist es, mit welchem sich der vorliegende Aufsatz beschäftigt. Versteht man unter (R) irgend eine in der Ebene abgegrenzte zusammenhängende Fläche von beliebig gestellter Randcurve, so lautet dasselbe:

(1.) *Es soll eine Function $\Phi(x, y)$ gefunden werden, welche* I) *innerhalb (R) überall der Gleichung $\Delta\Phi = 0$* *) *Genüge leistet; welche* II) *sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ innerhalb (R) überall endlich, eindeutig und continuirlich bleibt; und welche* III) *am Rande von (R) gegebene Werthe besitzt.*

Es ist bekannt, dass die Behandlung der analogen Aufgabe des Raumes wesentlich erleichtert und gefördert wird durch die von *Green* und *Gauss* entwickelte Theorie des dem *Newton*schen Anziehungsgesetze entsprechenden Potentials. Aehnliche Vortheile resultiren für das hier vorliegende Problem der Ebene aus der Untersuchung eines gewissen anderen Anziehungsgesetzes oder vielmehr aus der Theorie des diesem neuen Gesetze zugehörigen Potentials. Wie man nämlich bei Behandlung des räumlichen Problemes eine Materie in Anwendung bringt, welche irgendwie im *Raume* vertheilt wird, und für welche das Potential zweier Theilchen aufeinander durch das Product ihrer Massen multiplicirt mit dem *reciproken Werth ihrer Entfernung* dargestellt

*) Unter $\Delta\Phi$ soll durchgängig der Ausdruck $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ verstanden werden.

wird; ebenso ist es hier bei Behandlung unseres Problemes der Ebene zweckmässig, eine fingirte Materie oder ein fingirtes Fluidum zu Hülfe zu nehmen, welches auf beliebige Weise in der *Ebene* vertheilt wird, und für welches das Potential zweier Theilchen aufeinander gleich ist dem Product ihrer Massen multiplicirt mit dem *Logarithmus ihrer Entfernung*. Es hat dieses Logarithmische Potential in Bezug auf die Ebene Eigenschaften, welche vollständig analog sind mit denen, die das dem *Newton*schen Gesetze entsprechende Potential für den Raum besitzt; und verdient unter diesen Eigenschaften folgende hervorgehoben zu werden:

(2.) Stellt V das Logarithmische Potential irgend einer in der Ebene befindlichen Massenvertheilung in Bezug auf einen variablen Punkt (x, y) vor; und befinden sich jene Massen sämmtlich *ausserhalb* einer in der Ebene abgegrenzten Fläche (R): so sind *innerhalb* (R) V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ endlich, eindeutig, continuirlich, und $\Delta V=0$.

Und umgekehrt:

(3.) Besitzt V *innerhalb* (R) die eben angegebenen Eigenschaften, so lässt sich dasselbe immer als das Logarithmische Potential von Massen darstellen, die in dem *ausserhalb* (R) befindlichen Theile der Ebene liegen.

Analog, wie es im Raume üblich ist, werde ich eine Function V, welche zur Fläche (R) in der durch (2.) und (3.) dargestellten Beziehung steht, eine *Potentialfunction der Fläche* (R) nennen. Demnach kann man dann die Bedingungen I), II), welchen die unbekannte Function Φ unseres Problemes (1.) genügen soll, auch dahin zusammenfassen, dass man sagt, Φ soll eine Potentialfunction des gegebenen Raumes (R) sein.

Dass unser Problem (1.) immer lösbar ist, und immer nur eine einzige Lösung gestattet, lässt sich in ganz ähnlicher Weise darthun, wie solches von *Gauss* für das analoge Problem des Raumes bewiesen ist. Ich übergehe daher diesen Beweis, und übergehe aus gleichem Grunde auch den Beweis der Sätze (2.) und (3.)

Ich werde zunächst über denjenigen Theil der Theorie des Logarithmischen Potentials, welcher bei Lösung unseres Problemes (1.) zur Anwendung kommen wird, einen Ueberblick geben; werde dabei aber aus dem bereits genannten Grunde oft nur andeutend zu Werke gehen.

Bezeichnet man mit q einen beliebig gewählten festen Punkt *innerhalb* der gegebenen Fläche (R), so wird man immer die Randcurve dieser Fläche mit einer gewissen Quantität des fingirten Fluidums der Art *„belegen“* *) können, dass diese Belegung auf alle Punkte der Ebene, die *ausserhalb* (R) liegen, ebenso einwirkt wie eine in dem gegebenen inneren Punkte q concentrirte Masse $+1$; oder genauer ausgedrückt: es wird immer eine Randbelegung des Raumes (R) existiren, welche in Bezug auf alle äusseren Punkte gleiches Potential besitzt mit einer in q concentrirten Masse $+1$. Ich werde dieselbe *„die dem Centrum q entsprechende Randbelegung“* nennen, und die bei dieser Belegung auf einem Element ds_a der Randcurve vorhandene Masse mit $H_a^{(q)}ds_a$ bezeichnen. Versteht man also unter x einen beliebigen äusseren Punkt und unter L_{ax}, L_{qx} die Logarithmen der Abstände, welche x von ds_a und q hat, so ist:

$$(4.)\qquad \int ds_a H_a^{(q)} L_{ax} = L_{qx}.$$

Fig. A

Ebenso wie diese Formel das Potential der in Rede stehenden Randbelegung auf *äussere* Punkte x repräsentirt, so werde ich andererseits das Potential derselben auf einen beliebigen *inneren* Punkt p (Fig. A) mit

$$(5.)\qquad \int ds_a H_a^{(q)} L_{ap} = G_p^{(q)}$$

bezeichnen, und dasselbe *die dem Centrum q entsprechende Greensche Function* nennen. Wenn wir uns gegenwärtig die dem Centrum p entsprechende Randbelegung gebildet denken, und die bei derselben auf irgend einem Randelement ds_b vorhandene Masse mit $H_b^{(p)}ds_b$ bezeichnen, so ist analog mit (4.):

$$\int ds_b H_b^{(p)} L_{bx} = L_{px}$$

oder, wenn wir den äusseren Punct x in eine Stelle a des Randes fallen lassen:

$$(5^a.)\qquad \int ds_b H_b^{(p)} L_{ba} = L_{pa};$$

und wenn wir diesen Werth von L_{pa} in (5.) substituiren:

$$\iint ds_a\, ds_b\, H_a^{(q)} H_b^{(p)} L_{ab} = G_p^{(q)}.$$

Hieraus ersieht man sofort, *dass die Greensche Function $G_p^{(q)}$ symmetrisch ist*

*) in ähnlicher Weise, wie man sich im Raume die Oberfläche eines Körpers mit electrischem Fluidum *„belegt“* denkt.

in Bezug auf p und q; dass also z. B.

$$(6.)\qquad G_p^{(q)}=\int ds_a H_a^{(q)} L_{ap}=\int ds_a H_a^{(p)} L_{aq}$$

ist. Eine zweite wichtige Eigenschaft der *Green*schen Function ergiebt sich gleichfalls aus den Formeln (4.) und (5.). Wendet man dieselben nämlich auf den Fall an, dass der äussere Punkt x der einen und gleichzeitig auch der innere Punkt p der andern in eine Stelle b des Randes fiele, so werden die linken Seiten beider Formeln identisch. Somit folgt $L_{qb}=G_b^{(q)}$. Beachtet man diese Gleichung, und beachtet man ferner, dass die *Green*sche Function sich auf die Einwirkung von Massen bezieht, welche am Rande von (R) also *ausserhalb* der Fläche (R) liegen, dass sie demnach eine Potentialfunction des Raumes (R) ist, so ergiebt sich für dieselbe sofort folgende secundäre Definition:

(7.) *Die einem inneren Centrum q entsprechende Greensche Function* $G_p^{(q)}$ kann definirt werden als diejenige Potentialfunction des gegebenen Raumes, welche mit dem Logarithmus des Radius qp gleichwerthig wird, sobald der variable Punkt p an den Rand des Raumes rückt.

Beiläufig ergiebt sich hieraus, dass die durch die Bedingungen (1.) definirte Function Φ sich in die dem Centrum q entsprechende *Green*sche Function $G^{(q)}$ verwandelt, sobald man dort zu den gegebenen Randwerthen von Φ die Logarithmen der, vom Centrum q nach dem Rande gezogenen, Radii-vectores nimmt.

Es bleibt endlich noch übrig, den Zusammenhang anzugeben, welcher stattfindet zwischen der unbekannten Function Φ unseres Problemes (1.) und zwischen der irgend einem Centrum entsprechenden Randbelegung. Zu diesem Zwecke bediene ich mich folgendes Satzes:

(8.) Eine Potentialfunction des Raumes $(R.)$ lässt sich immer darstellen als das Potential einer gewissen Randbelegung des Raumes.

Es wird daher eine Randbelegung $ds_a P_a$ von $(R.)$ existiren müssen, mit Hülfe deren sich der Werth unserer unbekannten Function Φ für irgend einen innern Punkt p in folgender Weise darstellen lässt:

$$(9.)\qquad \Phi_p=\int ds_a P_a L_{ap}.$$

Substituirt man für L_{ap} den Werth $(5^a.)$, so ergiebt sich:

$$\Phi_p=\iint ds_a ds_b P_a H_b^{(p)} L_{ab}.$$

Man kann hier die Integration nach ds_a vermittelst derjenigen Gleichung be-

werkstelligen, welche aus (9.) durch Verschiebung des variablen Punktes p nach irgend einer Randstelle b entspringt d. i. vermittelst der Gleichung

$$\Phi_b = \int ds_a P_a L_{ab};$$

und erhält dann:

$$(10.) \qquad \Phi_p = \int ds_b H_b^{(p)} \Phi_b.$$

Da die Randwerthe Φ_b gegeben sind, so ist die Ermittelung des Werthes, welchen die unbekannte Function Φ in irgend einem inneren Punkte p besitzt, hiemit (nämlich durch (10.)) reducirt auf die Bestimmung der dem Centrum p entsprechenden Randbelegung $H^{(p)}$; oder, was dasselbe ist, *reducirt auf die Ermittelung der dem Centrum p entsprechenden Greenschen Function.* Wie man hier sieht, muss die Lösung der eben genannten Fundamentalaufgabe (d. h. die Ermittelung der *Green*schen Function) für *jede beliebige Lage* des Centrums ausgeführt sein, falls man daraus die *vollständige* Lösung unseres Problemes (1.), nämlich die Werthbestimmung von Φ für *jeden beliebigen* inneren Punkt ableiten will. In §. 5. werde ich zeigen, dass diese Fundamental-Aufgabe auf eine noch einfachere Aufgabe zurückgeführt werden kann, dass nämlich die Kenntniss der *Green*schen Function für *eine einzige Lage* des Centrums bereits ausreichend ist zur vollständigen Lösung unseres Problemes (1.).

2.

Untersuchung eines gewissen Niveau-Curven-Systemes, welches um ein gerades Liniensegment auf ähnliche Weise herumläuft, wie confocale Ellipsen um ihre Brennlinie.

Ein beliebiges Segment der x-Axe werde mit gg' bezeichnet, und dieses mit einer beliebigen Quantität des fingirten Fluidums belegt gedacht. Ausserdem seien in der Ebene andere Massen M dieses Fluidums auf beliebige Weise und an beliebigen Stellen jedoch *symmetrisch zur x-Axe* vertheilt. Denken wir uns nun die Massen M fest, das auf gg' befindliche Fluidum dagegen längs dieser Linie gg' beweglich wie in einem an seinen Endpunkten geschlossenen Canal; denken wir uns ferner dieses in gg' enthaltene Fluidum wäre durch die gegenseitige Einwirkung seiner Theilchen sowie durch die Wirkung der festen Massen M hin und her bewegt worden, bis es schliesslich unter dem Einflusse dieser Kräfte zur Ruhe gelangt ist, sei dann aber *in dieser Gleichgewichtslage fest geworden;* und bezeichnen wir endlich bei dieser Anordnung das Potential der Massen M und gg' zusam-

mengenommen auf irgend einen Punkt x mit V_x: so lässt sich, wie ich zeigen werde, für den von der Niveau-Curve $V_x = \text{Const.}$ umschlossenen Raum das Problem (1.) immer lösen. Vorausgesetzt wird dabei allerdings noch ein Umstand, der aber erst später (in (11.)) erwähnt werden soll.

Es verdient bemerkt zu werden, dass zu denjenigen Curven, für welche man auf diese Weise die Lösung unseres Problemes (1.) erhält, viele bekannte Curven gehören. Für den Fall z. B., dass die äusseren Massen M Null sind, erhält man *eine Ellipse, deren Brennpunkte in g und g' liegen* *). Bei einer gewissen Anordnung der Massen M erhält man ferner die bekannte Curve vierten Grades: $ax^2+by^2=(x^2+y^2)^2$. Bei anderer Lage der Massen M ergeben sich endlich die mit den elliptischen Functionen in Zusammenhang stehenden Curven, welche Herr *Siebeck* (Bd. LVII, pag. 365 dieses Journals) untersucht und abgebildet hat.

An Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y werde ich andere Variablen ϑ, ω einführen, von welchen die erstere ϑ eine lineare Function des Potentiales V ist, und die letztere ω dadurch definirt werden kann, dass $\vartheta+i\omega$ eine monogene Function von $x+iy$ sein muss.

Aus der Anordnung, welche wir der Masse gg' haben zu Theil werden lassen, folgt sofort, dass das Potential V für alle Punkte des Segmentes gg' einen constanten Werth besitzt, dass also eine der Niveau-Curven $V = \text{Const.}$ durch dieses Linienstück selber repräsentirt wird. Die übrigen Niveau-Curven werden um gg' etwa in ähnlicher Art herumlaufen wie ein System confocaler Ellipsen um ihre gemeinsame Brennlinie und sämmtlich symmetrisch zur x-Axe liegen, wie aus der über die Lagerung der Massen M angenommenen Symmetrie sofort folgt. Die Symmetrie, welche das Ellipsensystem zur y-Axe darbietet, wird dagegen unserem Niveau-Curven-System im Allgemeinen fehlen.

---

*) In der That habe ich, wie bei einer anderen Gelegenheit dargelegt werden soll, gefunden, dass ein System confocaler Ellipsen definirt werden kann als ein gewisses System von Niveau-Curven, nämlich dargestellt werden kann durch die Gleichung $V_x = \text{Const.}$, wo V_x das Potential derjenigen Wirkung vorstellt, welches die mit einer Quantität des fingirten Fluidums belegt gedachte Brennlinie auf einen beliebigen Punkt x ausübt, vorausgesetzt, dass jenes Fluidum auf der Brennlinie diejenige Vertheilung besitzt, welche zu seinem Gleichgewicht auf derselben erforderlich ist. Eine ganz analoge Eigenschaft besitzt übrigens auch ein System confocaler Ellipsoide in Bezug auf seine Brenn*ebene*. Nur muss man dort an Stelle des fingirten Fluidums das elektrische Fluidum zur Belegung der Brennebene in Anwendung bringen.

Ich füge nun zu dem vorhin Bemerkten hinzu, dass ich für die Niveau-Curve $V=\text{Const.}$

(11.) das Problem (1.) nur dann zu lösen im Stande bin, wenn von den supponirten Massen M und gg' allein gg' innerhalb der Curve, M hingegen ausserhalb derselben liegt.

Zuvörderst ist eine genaue Untersuchung der Functionen V, ϑ, ω nothwendig. ϑ soll definirt sein durch die Gleichung:

$$(12.)\qquad \vartheta = A(V-V_0),$$

wo A eine noch disponible Constante und V_0 den Werth vorstellt, welchen das Potential V für die Linie gg' besitzt. Ferner soll ω für alle Stellen der Ebene, an welchen ΔV, mithin auch $\Delta\vartheta$ Null ist, definirt sein durch die Gleichungen:

$$(13.)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0$$

und durch die Anfangsbedingung: $\omega=0$ für den Punkt g. Bezeichnet man, wie fortan stets geschehen soll, mit n die von Innen nach Aussen gerichtete Normale einer Niveau-Curve, und mit s diejenige Richtung der Curve selber, welche zu n ebenso liegt, wie die y-Axe zur x-Axe (Fig. I, pag. 343); so ist:

$$(14.)\qquad \cos(n,x)=\cos(s,y),\qquad \cos(n,y)+\cos(s,x)=0.$$

Da nun:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cos(n,y),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos(s,x)+\frac{\partial\omega}{\partial y}\cos(s,y),$$

so ergiebt sich aus (13.) und (14.)

(15.) sofort: $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=\frac{\partial\omega}{\partial s}$ und auf ähnliche Weise: $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial n}=0.$

Dieselben Relationen werden auch für zwei *beliebige* auf einander senkrechte Richtungen ν und σ gelten; falls nur σ zu ν liegt, wie s zu n, das ist wie y zu x.

Eine andere Folgerung aus (13.) ist die Gleichung:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0,$$

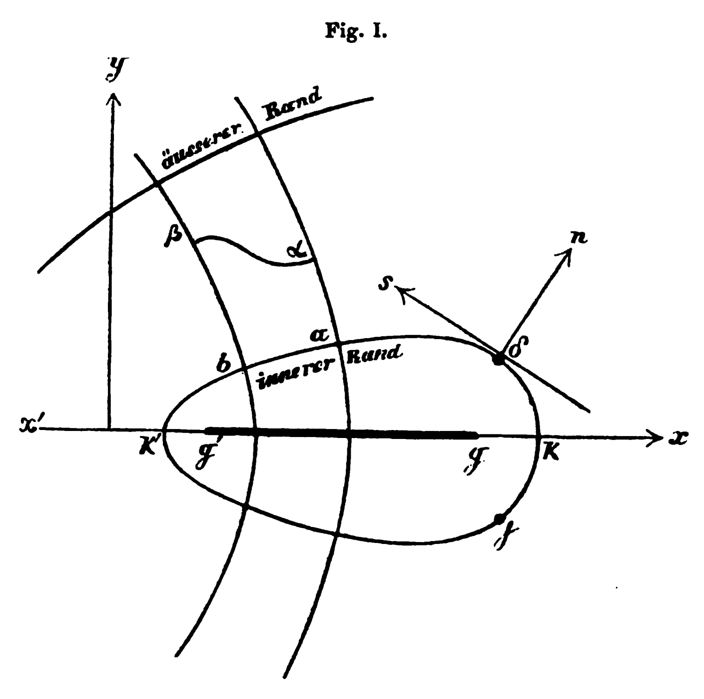
aus welcher erhellt, dass $\omega = \text{Const.}$ ein Curvensystem vorstellt, welches die Niveau-Curven $V = \text{Const.}$ oder $\vartheta = \text{Const.}$ senkrecht durchschneidet, welches also ebenfalls symmetrisch zur x-Axe liegen muss, und zu welchem unter Anderem auch die rechts- und links-fortlaufenden Verlängerungen von gg' gehören werden. Die senkrechte Trajectorie gx (Fig. I) wird dargestellt sein durch die Gleichung $\omega = 0$, weil ω seiner Definition zufolge im Punkte g den Werth 0 besitzt; hingegen wird sich zeigen, dass die senkrechte Trajectorie $g'x'$ durch einen *anderen* constanten Werth von ω repräsentirt wird. Auch werden wir finden, dass alle übrigen unter den hier vorhandenen Trajectorien durch zwei verschiedene constante Werthe von ω dargestellt sind, von denen sich der eine auf die oberhalb, der andere auf die unterhalb gg' liegende Hälfte der Trajectorie bezieht. — Der so eben für gx gefundenen Gleichung $\omega = 0$ kann die Gleichung der Linie gg' selber zur Seite gestellt werden. Diese nämlich ist repräsentirt durch $V = V_0$, also nach (12.) durch $\vartheta = 0$.

Für den von einer Niveau-Curve umschlossenen Raum ist V keine Potentialfunction, weil die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ discontinuirlich sind für die innerhalb dieses Raumes befindliche mit Masse belegte Linie gg'. Zur weiteren Untersuchung von ϑ und ω ist es daher zweckmässig an Stelle des von einer Niveau-Curve begrenzten *vollen* inneren Raumes einen *von zwei Niveau-Curven begrenzten ringförmigen Raum* (R'') *zu betrachten, welcher so gewählt sein soll, dass derselbe nicht allein von den Massen* gg', *sondern auch von den supponirten Massen M vollständig frei ist*, dass also V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ mithin (nach (12.) und (13.)) auch ϑ, $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ innerhalb (R'') überall endlich, eindeutig und continuirlich bleiben. Um den Gang von ω selber innerhalb (R'') zu erkennen, müssen wir zunächst die Werthe untersuchen, welche das Integral

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\,d\sigma$$

besitzt, wenn dasselbe über ein kleines Curvenstück $\alpha\beta$ (Fig. I.) ausgedehnt ist, dessen Elemente $d\sigma$ sämmtlich innerhalb (R^0) liegen, und darin unter ν die Normale von $d\sigma$ verstanden wird. Wir projiciren zu diesem Zweck das gegebene Curvenstück $\alpha\beta$ auf den inneren Rand des Raumes (R), indem wir uns dabei als Projectionslinien der senkrechten Trajectorien des Niveau-Curven-Systems bedienen; und wenden sodann auf das von $\alpha\beta$ selber, von der eben erhaltenen Projection ab und von den beiden senkrechten Trajectorien $a\alpha$, $b\beta$ eingeschlossene Curven-Viereck die bekannte Formel

Fig. I.



$$\int \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} d\sigma = \iint \Delta\vartheta \, . \, dx\, dy$$

an, wo sich die beiden Integrale respective auf den Rand und auf die Fläche des Vierecks beziehen. Beachtet man, dass die Fläche des Vierecks vollständig dem Raum (R^0) angehört, dass demnach ϑ für dieses Viereck eine Potentialfunction ist, so sieht man, dass $\Delta\vartheta$ in dem Integrale rechts 0 ist. Das Integral linker Hand besteht aus vier Theilen, welche respective den Curven $\alpha\beta$, ab, $a\alpha$, $b\beta$ angehören, und von welchen die beiden letzten Null sind, weil $\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}$ verschwindet, sobald ν senkrecht gegen eine Trajectorie zu liegen kommt. Demnach ergiebt sich:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} d\sigma + \int_b^a \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} d\sigma = 0,$$

wo ν in beiden Integralen diejenige Richtung der Normale vorstellt, welche

in Bezug auf die Fläche unseres Vierecks von Innen nach Aussen fortläuft. Nehmen wir in dem zweiten Integrale an Stelle dieser Normale ν die entgegengesetzte Richtung n, so erhalten wir:

$$\int_a^\beta \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_b^a \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,d\sigma$$

oder wenn wir endlich im zweiten Integrale, an Stelle der in der Richtung ba gerechneten Bogenlänge σ, die in der Richtung ab gerechnete Bogenlänge s einführen:

$$(16.)\qquad \int_a^\beta \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_a^b \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,ds,$$

wo nun gegenwärtig ν zur Richtung $\alpha\beta$ ebenso liegt wie n zu ab. Diese Formel sagt:

(17.) Das über irgend ein Curvenstück ausgedehnte Integral $\int \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\,d\sigma$ hat stets gleichen Werth mit demjenigen Integrale, welches der orthogonalen Projection dieses Curvenstückes auf den innern Rand in analoger Weise zugehört.

Und daraus ergiebt sich nun unmittelbar folgender wichtige Satz:

(18.) Dehnt man das Integral $\int^{\prime} \frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}\,d\sigma$ über eine beliebige *geschlossene* Curve aus, deren Elemente $d\sigma$ sämmtlich in (R'') liegen, so ist der Werth desselben entweder Null oder ein positives oder negatives Vielfache des dem inneren Rande zugehörigen und durch einmalige Umgehung desselben erhaltenen Integrales $J=\int^{\prime} \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,ds$.

Es wird nämlich das in Rede stehende Integral $\pm N.J$ sein, wenn man die gegebene Curve $(d\sigma)$ durch eine *continuirlich* fortschreitende Aenderung ihrer Lage und Gestalt und ohne dabei eines ihrer Elemente aus dem Raume (R'') herauszuschieben mit einem Nfachen Umgang des inneren Randes zur Deckung bringen kann. Und zwar wird der Werth $+N.J$ *oder* $-N.J$ sein, jenachdem die Normale ν der Curve $(d\sigma)$ bei der genannten Verschiebung mit der (im Integral J vorhandenen) Normale n des inneren Randes gleiche *oder* entgegengesetzte Richtung erhält.

Das über den inneren Rand ausgedehnte Integral

$$J=\int^{\prime} \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,ds = A\int^{\prime} \frac{\partial V}{\partial n}\,ds \quad \text{(nach (12.))}$$

behält übrigens, wie man aus (17.) sofort erkennt, denselben Werth, wenn

man an Stelle des Randes irgend eine andere in (R^0) befindliche Niveau-Curve zur Integration benutzt. Zur einfacheren Gestaltung des Nachfolgenden ist es zweckmässig, die noch disponible Constante A der Art zu wählen, dass $J=2\pi$ wird. Zu diesem Zweck müssen wir

$$A = \frac{2\pi}{\int \frac{\partial V}{\partial n} ds}$$

setzen, und haben dann nach (12.) als definitiven Werth von ϑ folgenden:

$$(19.) \qquad \vartheta = 2\pi \frac{V-V_0}{\int \frac{\partial V}{\partial n} ds} \quad \text{und} \quad J=2\pi.$$

Der Satz (18.) wird nun sofort Aufschluss geben über die Natur der Function ω. Ist der Werth $\omega=\omega_p$ für irgend einen Punkt p bekannt, so bestimmen sich die Werthe von ω in der Nähe von p *eindeutig* vermittelst der Formeln (13.). Wenn man sich aber vom Punkte p weiter entfernt, auf irgend einem vollständig in (R^0) liegenden Wege fortschreitet, und schliesslich wieder zu p zurückkehrt, so wird der Werth von ω bei der Rückkunft im Allgemeinen von ω_p differiren; so dass also ω für ein und denselben Punkt p *mehrere* Werthe besitzt. Bezeichnet man nämlich die durchlaufenen Wegelemente mit $d\sigma$, so ist der Werth ω'_p, welchen ω bei der Rückkehr nach p besitzt:

$$\omega'_p = \omega_p + \int \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Nennt man nun ν diejenige Normale von $d\sigma$, zu welcher die Richtung σ, in der man fortgegangen ist, ebenso liegt wie y zu x, so ist nach (15.): $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma}=\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}$. Nach (18.) und (19.) ist aber das Integral $\int \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} d\sigma = \pm N.J = \pm N.2\pi$ also:

$$\omega'_p = \omega_p \pm N.2\pi,$$

wo N irgend eine ganze Zahl vorstellt. Folglich:

(20.) Für irgend einen Punkt des Raumes (R^0) besitzt ω unendlich viele Werthe, welche von einander um Vielfache von 2π verschieden sind.

Genau genommen wird daher z. B. der Werth von ω für die senkrechte Trajectorie gx (Fig. I.) nicht als 0, sondern als irgend ein Vielfaches von 2π zu bezeichnen sein. Um den Werth von ω für die entgegengesetzt fortlaufende Trajectorie $g'x'$ zu erhalten, integriren wir über die obere Hälfte $k\delta k'$ des inneren

Randes, und erhalten dann, wenn wir mit dem Werthe $\omega_k = N.2\pi$ ausgehen, bei unserer Ankunft in k' folgenden Werth:

$$\omega_{k'} = \omega_k + \int_k^{k'} \frac{\partial\omega}{\partial s}\,ds = N.2\pi + \int_k^{k'} \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,ds \quad \text{(nach (15.))}.$$

Erinnern wir uns nun daran, dass die supponirten Massen M symmetrisch zur x-Axe liegen, dass also die Kräfte, welche diese Massen M in Verbindung mit der Masse gg' auf irgend zwei zur x-Axe symmetrische Punkte ausüben, ebenfalls symmetrisch sein müssen; so erhellt sofort, dass $\frac{\partial V}{\partial n}$ mithin auch $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ für zwei solche Punkte von gleichem Werth sein muss. Das über den inneren Rand ausgedehnte Integral ((18.) und (19.))

$$J = 2\pi = \int \frac{\partial\vartheta}{\partial n}\,ds$$

lässt sich daher in zwei Integrale zerlegen, von denen das eine der oberen, das andere der unteren Rand-Hälfte angehört, und welche beide gleichen Werth besitzen, beide also π sind. Demnach ist π der Werth des in unserer Formel für $\omega_{k'}$ vorhandenen Integrales; und daher:

$$\omega_{k'} = (2N+1)\pi, \quad \text{d. h.}$$

(21.) Die Werthe von ω sind für die beiden senkrechten Trajectorien gx und $g'x'$ (bis auf beliebige Vielfache von 2π) respective 0 und π.

Wir untersuchen endlich die Werthe von ω für zwei Punkte γ, δ des inneren Randes (Fig. I.), welche symmetrisch zur x-Axe liegen. Wenn wir von γ über k nach δ gehen, und den Ausgangswerth mit ω_γ bezeichnen, so erhalten wir in k und δ folgende Werthe:

$$\omega_k = \omega_\gamma + \int_\gamma^k \frac{\partial\omega}{\partial s}\,ds, \qquad \omega_\delta = \omega_k + \int_k^\delta \frac{\partial\omega}{\partial s}\,ds.$$

Da $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und somit (nach (15.)) auch $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ für zwei symmetrisch zur x-Axe liegende Elemente ds gleichen Werth besitzt, so ergiebt sich, dass die beiden Integrale in diesen Formeln einander gleich sind. Die Subtraction derselben liefert daher:

$$\omega_\gamma + \omega_\delta = 2\omega_k.$$

Da nun einer der Werthe von ω_k gleich Null ist, so ergiebt sich sofort:

(22.) Ist der Werth von ω für irgend einen Punkt des Raumes $(R^0) = \omega_1$, so ist der Werth dieser Function für den zum ersten symmetrisch liegenden Punkt (bis auf ein Vielfaches von 2π) $= -\omega_1$.

Wenn wir bis jetzt die Abhängigkeit untersucht haben, in welcher ϑ, ω zu x, y stehen, so ist es nun andererseits auch nothwendig, näher zu bestimmen, in welcher Weise umgekehrt x, y von ϑ, ω abhängen. Das Potential V wird, da der Raum (R^0) von Masse frei ist, entweder beständig im Wachsen oder beständig im Abnehmen begriffen sein, während man von dem inneren Rande dieses Raumes längs einer senkrechten Trajectorie zum äusseren Rande fortgeht; also $\frac{\partial V}{\partial n}$ während dieses Ganges entweder stets pos. oder stets neg. bleiben. Andererseits ist klar, dass $\frac{\partial V}{\partial n}$ auch dann dasselbe Vorzeichen behalten muss, wenn man längs irgend einer Niveau-Curve fortgeht. Da demnach $\frac{\partial V}{\partial n}$ für den *ganzen* Raum (R^0) ein und dasselbe Vorzeichen besitzt, so wird, der aus (19.) entspringenden Formel

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = 2\pi\frac{\frac{\partial V}{\partial n}}{\int\frac{\partial V}{\partial n}ds}$$

zufolge, $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ innerhalb (R^0) überall pos. sein. Nimmt man hinzu, dass nach (15.) $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=\frac{\partial\omega}{\partial s}$ ist, so folgt:

(23.) Innerhalb (R^0) ist ϑ beständig im Wachsen begriffen, während man vom inneren Rande des Raumes längs einer senkrechten Trajectorie zum äusseren Rande fortgeht; ω ist beständig im Wachsen begriffen, während man längs einer Niveau-Curve und zwar in ihrer Richtung s (14.) fortschreitet.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass jede in (R^0) liegende Niveau-Curve durch Angabe des ihr entsprechenden Werthes von ϑ *eindeutig* bestimmt wird; so wie auch andererseits, dass, wenn eine dieser Niveau-Curven gegeben ist, jeder auf derselben liegende Punkt durch Angabe des ihm zugehörigen Werthes von ω *eindeutig* bestimmt wird. D. h.:

(24.) Die Coordinaten x, y der in (R^0) befindlichen Punkte sind *eindeutige* Functionen von ϑ und ω.

Schliesslich mag in Betreff der Variablen ϑ, ω noch bemerkt werden, dass durch Einführung derselben an Stelle von x, y die Gleichung:

$$\varDelta F=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$$

übergeht in:

$$(25.) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}=0,$$

wie sich aus den Formeln (13.) leicht ergiebt.

---

§. 3.

Lösung des Problemes (1.) für den von einer Niveau-Curve des §. 2 begrenzten Raum. Satz über eine beliebige zur x-Axe symmetrische geschlossene Curve (42.).

Es handelt sich darum, die *Green*sche Function für den von einer Niveau-Curve umschlossenen Raum aufzustellen, d. h. eine Function zu finden, welche den in (7.) angegebenen Bedingungen entspricht. Um von diesen Bedingungen successive eine nach der anderen zu berücksichtigen, werden wir *zuerst* eine Reihe möglichst einfacher Potentialfunctionen des in Rede stehenden Raumes bilden, und sodann *zweitens* aus diesen, durch Multiplication mit geeigneten Constanten und Addition, eine neue Potentialfunction zusammensetzen, welche gleichzeitig auch der zweiten in (7.) ausgesprochenen Bedingung, nämlich der dort angegebenen Randbedingung Genüge leistet.

Eine Potentialfunction F irgend eines Raumes ist dadurch definirt, dass innerhalb dieses Raumes

I. $\varDelta F=0$ ist,

II. F selber, $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ endlich, eindeutig und continuirlich bleiben.

Wir wollen zunächst nicht den von einer Niveaucurve umschlossenen *vollen* inneren Raum, sondern wieder den *ringförmigen* Raum (R^0) betrachten, dessen Randcurven so gewählt waren, dass dieser Raum von den supponirten Massen vollständig frei ist; und zuerst für *diesen* die möglichst einfachen Potentialfunctionen bilden. Die Gleichung (I.) verwandelt sich hier (nach (25.)) in $\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}=0$, und besitzt daher folgende particuläre Integrale:

$$(26.) \qquad \begin{cases} F = (A^0+B^0\vartheta)+(C^0+D^0\vartheta)\,\omega, \\ F = (Ae^{n\vartheta}+Be^{-n\vartheta})\cos n\omega+(Ce^{n\vartheta}+De^{-n\vartheta})\sin n\omega, \end{cases}$$

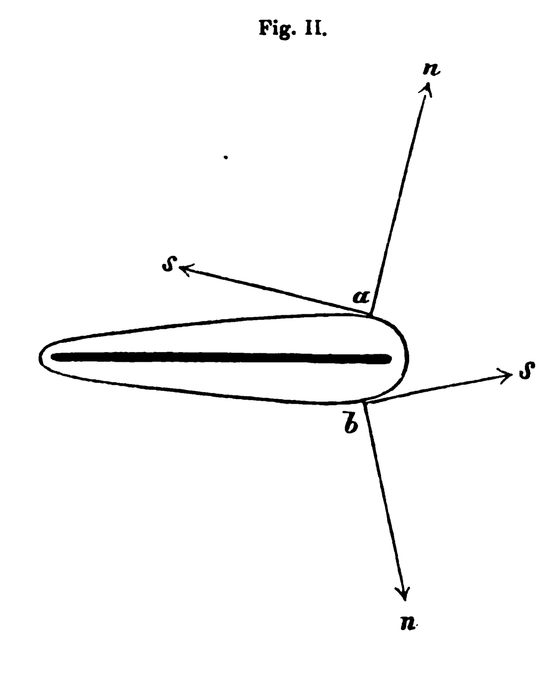
wo n, A, B, C, D, A^0, ... willkürliche Constanten sind. Erinnern wir uns nun daran, dass V das Potential der supponirten Massen M und gg' auf einen variablen Punkt vorstellt, dass diese Massen aber sämmtlich ausserhalb (R^0) liegen; so erhellt sofort, dass V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ innerhalb dieses Raumes endlich, eindeutig und continuirlich sind. Dasselbe wird daher (nach (12.)) auch von ϑ, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ und (nach (13.)) auch von $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ gelten. Besässe demnach ω selber ebenfalls diese Eigenschaften, so würden die Functionen F (26.), nicht nur der Bedingung (I.), sondern auch der Bedingung (II.) genügen. Obgleich nun aber ω selber *vieldeutig* ist, so kann doch dieser störende Einfluss durch geeignete Wahl der in den F enthaltenen willkürlichen Constanten leicht beseitigt werden. Beachtet man nämlich, dass nach (20.) $\cos n\omega$ und $\sin n\omega$ eindeutig sind, falls man nur für n eine *ganze Zahl* nimmt, so ergiebt sich sofort:

(27.) Die Functionen F (26.) sind Potentialfunctionen des ringförmigen Raumes (R^0), wenn man darin die Constanten C^0, D^0 verschwinden lässt, unter n eine ganze Zahl, und unter A^0, B^0, A, B, C, D willkürliche Constanten versteht.

Dieses Resultat wird später unmittelbar zur Anwendung gelangen, wenn es sich um die Ermittelung der *Greens*chen Function für den *ringförmigen* Raum (R^0) handeln wird.

Gegenwärtig gehen wir sogleich zu dem von einer Niveau-Curve umschlossenen *vollen* Raum (R) über; nehmen dabei aber (wie bereits in (11.) als nothwendig bemerkt wurde) an, dass dieser Raum *nur* die centrale Masse gg' in sich enthält, nämlich frei ist von den Massen M. Construiren wir in diesem Raume irgend eine Niveau-Curve, welche sich in ganz *beliebiger* Entfernung um die centrale Niveau-Curve gg' herumziehen mag; so erhalten wir zwischen dieser Curve und zwischen dem Rande von (R) einen ringförmigen Raum, welcher von den supponirten Massen vollständig frei ist, und auf welchen daher die Resultate der vorhin angestellten Untersuchungen unmittelbar anwendbar sind. So ergiebt sich also z. B., dass für diesen ringförmigen Raum, dessen innerer Rand der centralen Curve gg' beliebig, selbst unendlich nahe liegen kann, die in (27.) angegebenen F Potentialfunctionen

Fig. II.



sind. Wir wollen nun je zwei gegenüberliegende Punkte des inneren Randes mit a, b bezeichnen (Fig. II.) und untersuchen ob unsere Functionen F den eben genannten Charakter auch dann noch behalten d. h. auch dann noch den Bedingungen (I.) und (II.) Genüge leisten, wenn bei fortgesetzter Zusammenziehung des inneren Randes je zwei Punkte a, b zusammenfallen und hiedurch der *ringförmige* Raum in den gegebenen *vollen* Raum (R) übergeht. Man sieht sofort, dass den Bedingungen (II.) genügt wird, wenn bei unendlicher Näherung der Punkte a, b

$$(28.)\qquad (F)_a=(F)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_a=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_b$$

wird; und ferner, dass falls auf diese Weise die in (II.) gestellten Anforderungen beim Uebergange des ringförmigen Raumes in den gegebenen vollen Raum (R) erfüllt bleiben, Gleiches in Bezug auf die in (I.) gestellte Anforderung bereits von selber erfolgt.

Construiren wir in den Punkten a, b des inneren Randes die nach Aussen gerichteten Normalen n und die in (14.) definirten tangentialen Richtungen s (Fig. II.); und beachten wir, dass die beiden Richtungen n bei unendlich kleiner Distanz der Punkte a, b parallel und entgegengesetzt fortlaufen, dass ferner Gleiches für die beiden Richtungen s gilt; so verwandeln sich die Bedingungen (28.) in:

$$(29.)\qquad (F)_a=(F)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_b.$$

Da n und s die Normalen der Curven $\vartheta=$ Const. und $\omega=$ Const. sind, so ist:

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial n},\qquad \frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial s}.$$

Da ferner, wie bereits früher bemerkt wurde, $\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$ und ebenso $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ für

zwei zur x-Axe symmetrisch liegende Punkte gleichen Werth besitzen, so ist:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)_a=\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)_b,\quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial s}\right)_a=\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}\right)_b.$$

Demnach verwandeln sich die Bedingungen (29.) in:

$$(30.)\quad (F)_a=(F)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)_b,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_b.$$

Wir werden nun finden, dass unsere Functionen F (27.) diesen Bedingungen im Allgemeinen nicht genügen, sondern, dass es dazu einer gewissen Beschränkung der in ihnen enthaltenen willkürlichen Constanten bedarf. Es ist nach (27.):

$$(31.)\quad \begin{cases} F=A^0+B^0\vartheta, & F=\quad(Ae^{n\vartheta}+Be^{-n\vartheta})\cos n\omega+(Ce^{n\vartheta}+De^{-n\vartheta})\sin n\omega,\\ \frac{\partial F}{\partial\vartheta}=\quad B^0, & \frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=\quad(Ae^{n\vartheta}-Be^{-n\vartheta})\cos n\omega+(Ce^{n\vartheta}-De^{-n\vartheta})\sin n\omega,\\ \frac{\partial F}{\partial\omega}=\quad 0, & \frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial\omega}=-(Ae^{n\vartheta}+Be^{-n\vartheta})\sin n\omega+(Ce^{n\vartheta}+De^{-n\vartheta})\cos n\omega. \end{cases}$$

Da nun (nach (22.)) die Coordinaten zweier symmetrisch zur x-Axe liegenden Punkte ϑ, ω und ϑ, $-\omega$ sind; da ferner ϑ für die Linie gg' Null ist, und also die Coordinaten unserer beiden einander unendlich nahen Punkte a, b respective 0, ω und 0, $-\omega$ sind; so wird man die Bedingungen (30.) erhalten, wenn man in den für F, $\frac{\partial F}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial F}{\partial\omega}$ aufgestellten Werthen (31.) an Stelle von ϑ, ω einmal 0, ω, sodann zweitens 0, $-\omega$ substituirt, und darauf die in beiden Fällen für F resultirenden Werthe einander gleich, dagegen die für $\frac{\partial F}{\partial\vartheta}$ sowie für $\frac{\partial F}{\partial\omega}$ resultirenden Werthe einander entgegengesetzt gleich setzt. Die so entstehenden Relationen werden dann stattfinden müssen für jede beliebige Lage des Punktpaares a, b, d. h. für beliebige Werthe von ω. Hierdurch ergeben sich für die in den F enthaltenen willkürlichen Constanten folgende Beschränkungen:

$$\begin{array}{llll} \text{Aus:} & (F)_a=(F)_b & \text{folgt:} & * \quad C+D=0\\ \text{Aus:} & \left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)_b & \text{folgt:} & B^0=0,\ A-B=0\\ \text{Aus:} & \left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_a=-\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_b & \text{folgt:} & * \quad C+D=0, \end{array}$$

also zusammengenommen:

$$B^0=0,\quad D=-C,\quad B=A.$$

Diesen Beschränkungen hat man also die in (27.) angegebenen F hinsichtlich

ihrer willkürlichen Constanten zu unterwerfen, wenn man die Potentialfunctionen des gegebenen *vollen* Raumes (R) haben will. Mithin:

(32.) Bedeuten A'', A, C willkürliche Constanten und bedeutet n irgend eine ganze Zahl, so sind

$$F = A'',$$
$$F = A(e^{n\vartheta}+e^{-n\vartheta})\cos n\omega + C(e^{n\vartheta}-e^{-n\vartheta})\sin n\omega$$

Potentialfunctionen des vollen Raumes (R).

Die *Green*sche Function $G_p^{(q)}$ unseres Raumes (R) ist nach (7.) diejenige Potentialfunction dieses Raumes, welche einer gewissen dort angegebenen Randbedingung Genüge leistet. Nehmen wir daher für $G_p^{(q)}$ ein aus den eben gefundenen Potentialfunctionen F (32.) gebildetes Aggregat und setzen also:

$$(33.)\qquad 2\pi . G_p^{(q)} = A''+2.\Sigma(A(e^{n\vartheta}+e^{-n\vartheta})\cos n\omega + C(e^{n\vartheta}-e^{-n\vartheta})\sin n\omega),$$

wo dann ϑ, ω die Coordinaten des in (R) befindlichen variablen Punktes p sind, auf welchen sich $G_p^{(q)}$ bezieht; so bleibt nur noch übrig, dass wir durch geeignete Wahl der Constanten A'', A, C jener Randbedingung Genüge leisten. Diese letztere wird, wenn wir unter b einen auf dem Rande von (R) verschiebbaren Punkt verstehen, und mit L_{qb} den Logarithmus desjenigen Radiusvector bezeichnen, welcher von dem innerhalb (R) angenommenen Centrum q nach b gezogen ist, durch

$$(34.)\qquad G_b^{(q)} = L_{qb}$$

dargestellt. — Es wird hier eine gewisse Umgestaltung von L_{qb} erforderlich. Der Werth von L_{qb} hängt, weil q fest ist und b immer auf dem Rande bleiben soll, *allein* von der ω-Coordinate des Punktes b ab, welche mit ω_b bezeichnet werden mag. Also:

$$L_{qb} = f(\omega_b).$$

Da (zufolge (24.)) jedem Werthe von ω_b nur ein einziger Punkt b zugehört, und da ferner (zufolge der geometrischen Bedeutung von L_{qb}) jedem Punkt b nur ein einziger Werth von L_{qb} entspricht, so ist L_{qb} eine *einwerthige* Function von ω_b; und also innerhalb des Intervalles $\omega_b = 0 \ldots 2\pi$ entwickelbar nach den Cos. und Sin. der Vielfachen von ω_b. Denkt man sich diese Entwickelung ausgeführt, so unterliegt es keinem Zweifel, dass dieselbe nicht

nur innerhalb des eben genannten Intervalles, sondern ganz allgemein gültig bleiben wird, weil der Punkt b (nach (20.) und (24.)) zu derselben Randstelle und folglich L_{qb} zu demselben Werthe zurückkehren muss, sobald ω_b um ein Vielfaches von 2π gewachsen ist. Wir haben daher, ohne irgend welche einschränkende Bedingung, für L_{qb} oder $f(\omega_b)$ folgende Entwickelung:

$$2\pi f(\omega_b) = \int_0^{2\pi}\Big(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n(\omega_b-\omega_a)\Big)f(\omega_a)\,d\omega_a,$$

wo ω_a eine zur Integration dienende, während derselben von 0 bis 2π fortgehende Variable vorstellt. Die Werthe, welche $f(\omega_a)$ oder L_{qa} hierbei durchläuft, sind geometrisch durch den Logarithmus eines Radius-vectors $\overline{qa}$ repräsentirt, dessen im Rande liegender Endpunkt a während der Integration einmal um den Rand herumläuft. Wir erhalten also:

$$(35.)\qquad 2\pi L_{qb} = \int_0^{2\pi}\Big(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n(\omega_b-\omega_a)\Big)L_{qa}\,d\omega_a.$$

Um nun die Randbedingung (34.) aufstellen zu können, bezeichnen wir den constanten Werth, welchen ϑ am Rande des gegebenen Raumes (R) besitzt, mit $\vartheta=c$; und erhalten dann sofort den Werth von $G_b^{(q)}$, wenn wir in (33.) an Stelle der Coordinaten ϑ, ω des Punktes p die Coordinaten c, ω_b des Randpunktes b substituiren; mithin:

$$(36.)\qquad 2\pi G_b^{(q)} = A^0+2\Sigma\big(A(e^{nc}+e^{-nc})\cos n\omega_b+C(e^{nc}-e^{-nc})\sin n\omega_b\big).$$

Die durch (34.) verlangte Gleichheit von (35.) und (36.) wird nunmehr augenblicklich erfüllt, wenn wir die Summe in (36.) über alle ganze Zahlen $n=1, 2, \dots \infty$ ausdehnen und dabei für A^0, A, C folgende Werthe nehmen:

$$A^0 = \int_0^{2\pi} L_{qa}\,d\omega_a,\qquad A(e^{nc}+e^{-nc}) = \int_0^{2\pi}\cos n\omega_a L_{qa}\,d\omega_a,$$
$$C(e^{nc}-e^{-nc}) = \int_0^{2\pi}\sin n\omega_a L_{qa}\,d\omega_a^2.$$

Substituiren wir diese Werthe in (33.), so ist die Bestimmung der *Green*schen Function für den gegebenen Raum (R) vollendet. Wir erhalten:

$$(37.)\qquad 2\pi G_p^{(q)}$$
$$=\int_0^{2\pi}\Big\{1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\Big(\frac{e^{n\vartheta}+e^{-n\vartheta}}{e^{nc}+e^{-nc}}\cos n\omega\cos n\omega_a+\frac{e^{n\vartheta}-e^{-n\vartheta}}{e^{nc}-e^{-nc}}\sin n\omega\sin n\omega_a\Big)\Big\}L_{aq}\,d\omega_a,$$

wo ϑ, ω die Coordinaten von p sind.

Die einem gegebenen Centrum entsprechende Randbelegung des Raumes (R) findet man nunmehr leicht, wenn man beachtet, dass $G_p^{(q)}$ in Bezug auf die Punkte p, q symmetrisch ist, und dass demzufolge (nach (6.)):

$$(38.)\qquad G_p^{(q)} = \int ds_a H_a^{(p)} L_{aq}$$

wird, wo $H^{(p)}$ die dem Centrum p entsprechende Randbelegung vorstellt. Bezeichnet man nun den mit dem Randelement ds_a correspondirenden Zuwachs von ω_a mit $d\omega_a$, und setzt die auf ds_a vertheilte Masse:

$$(39.)\qquad ds_a H_a^{(p)} = d\omega_a \eta_a^{(p)},$$

so verwandelt sich (38.) in

$$(40.)\qquad G_p^{(q)} = \int_0^{2\pi} d\omega_a \eta_a^{(p)} L_{aq}.$$

Und nunmehr giebt die Vergleichung von (37.) und (40.) sofort für die dem Centrum p entsprechende Randbelegung folgenden Werth:

$$(41.)\quad d\omega_a \eta_a^{(p)} = \frac{d\omega_a}{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{e^{n\vartheta}+e^{-n\vartheta}}{e^{nc}+e^{-nc}}\cos n\omega \cos n\omega_a + \frac{e^{n\vartheta}-e^{-n\vartheta}}{e^{nc}-e^{-nc}}\sin n\omega \sin n\omega_a\right)\right\},$$

wo zu erinnern ist, dass hier ϑ, ω die Coordinaten des Centrums p und c, ω_a die Coordinaten des Randpunktes a vorstellen.

Mit Hülfe dieser Randbelegung lässt sich nun das allgemeine Problem (1.) für unseren Raum (R) sofort lösen. Nach (10.) gilt nämlich für die unbekannte Function Φ jenes Problemes immer folgende Gleichung:

$$\Phi_p = \int ds_a H_a^{(p)} \Phi_a,$$

also nach (39.):

$$\Phi_p = \int_0^{2\pi} d\omega_a \eta_a^{(p)} \Phi_a.$$

Diese Formel liefert für den Werth der Function Φ in irgend einem inneren Punkte $p(\vartheta, \omega)$ ein Integral, unter welchem sich der gegebene Randwerth Φ_a und der so eben durch eine Reihe dargestellte Ausdruck $\eta_a^{(p)}$ (41.) vorfindet; repräsentirt also die vollständige Lösung unseres Problemes (1.) für den hier betrachteten von der Niveau-Curve $\vartheta = c$ begrenzten Raum.

Um das Resultat unserer Untersuchung übersehen zu können, müssen wir die Beziehung zu definiren suchen, welche die zur Lösung verwendeten Variablen ϑ, ω zu dem hier betrachteten Raume besitzen; und, da ϑ, ω von V abhängen (12.), (13.), zu diesem Zweck auf die Beziehung zurückgehen, welche das Potential V zu unserem Raume besitzt. Wenn wir uns für einen Augenblick das centrale Linien-Segment gg' in eine Niveau-Curve von unendlich geringer Breite und hierdurch den gegebenen Raum in einen ringförmigen verwandelt denken, können wir V definiren als eine Potentialfunction dieses letzteren Raumes, welche sowohl auf dem inneren Rande gg' als auch auf dem äusseren Rande desselben constante Werthe besitzt; und gelangen hierdurch dann leicht zu folgender Darstellung des durch unsere Untersuchung gewonnenen Resultates:

(42.) *Ist ein Raum gegeben, der von irgend welcher geschlossenen und zur x-Axe symmetrischen Curve begrenzt wird;*
ist ferner eine Function $V(x, y)$ bekannt, welche I) innerhalb dieses Raumes überall der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt; welche II) sammt ihren Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ für alle Stellen des gegebenen Raumes, mit Ausnahme irgend eines der x-Axe angehörigen Segmentes, endlich eindeutig und continuirlich bleibt; und welche endlich III) für dieses exceptionelle Liniensegment einen constanten und für die Randcurve ebenfalls, aber einen anderen, constanten Werth besitzt:
so lässt sich mit Hülfe dieser Function V die Lösung des allgemeinen Problems (1.) für den gegebenen Raum vollständig darstellen; und zwar durch folgende Methode:

„Man führe zwei Functionen ϑ, ω ein, von welchen die erste mit V „auf lineäre Weise verbunden, die andere so beschaffen ist, dass $\vartheta+i\omega$ von „$x+iy$ auf monogene Weise abhängt; *einerseits* nämlich setze man in Bezug „auf ϑ:

$$\vartheta = 2\pi \frac{V-V_0}{\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds},$$

„wo V_0 den constanten Werth vorstellt, welchen V auf dem exceptionellen „Segmente besitzt, wo ferner das im Nenner befindliche Integral über alle

„Elemente ds der Randcurve ausgedehnt ist und n die nach Aussen gerichtete „Normale dieser Curve repräsentirt; *andererseits* nehme man für ω diejenige „Function, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0$$

„genügt und zugleich für einen der beiden Endpunkte jenes Segmentes Null wird;

„man führe ferner an Stelle von x, y die Variablen ϑ, ω als Coor- „dinaten ein [was immer möglich ist, weil x, y stets *eindeutige* Functionen „von ϑ, ω sind]; und bezeichne die Coordinaten irgend eines *inneren Punktes* p „mit ϑ, ω selber, die Coordinaten irgend eines *Randpunktes* a mit c, ω_a, [wo „dann die ϑ-Coordinate c eine dem Rande angehörige *Constante* vorstellt, „deren Werth stets *positiv* sein wird].

„Nennt man sodann Φ_a die gegebenen Werthe, welche die unbekannte „Function des Problemes (1.) in den Randpunkten a besitzt, so ist der Werth „dieser Function in irgend einem inneren Punkte p folgender:

$$\Phi_p=\int_0^{2\pi}d\omega_a\,\eta_a^{(p)}\,\Phi_a,$$

„*wo* $\eta_a^{(p)}$ *einen vollständig bekannten aus* c, ω_a, ϑ, ω *zusammengesetzten Aus- „druck vorstellt*, nämlich denjenigen, welcher bei (41.) in Form einer unend- „lichen Reihe angegeben ist, und welcher später (bei (46.)) auch in ge- „schlossener Gestalt hingestellt werden wird."

Die für $\eta_a^{(p)}$ gefundene Reihe (41.) lässt sich summiren vermittelst der *Jacobi*schen Function Z. Zu diesem Zwecke setze man:

$$c+\vartheta=S,\qquad \omega_a+\omega=\sigma,$$
$$c-\vartheta=D,\qquad \omega_a-\omega=\delta,\qquad e^{-2c}=q.$$

Dadurch erhält die Reihe (41.) leicht folgende Gestalt:

$$(43.)\qquad 2\pi\eta_a^{(p)}=1-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{nS}-e^{-nS}}{q^n-q^{-n}}\cos n\delta-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{nD}-e^{-nD}}{q^n-q^{-n}}\cos n\sigma.$$

Da ϑ für die centrale Curve gg' Null ist, so wird (nach (23.)) innerhalb des gegebenen Raumes ϑ überall positiv bleiben, also auch der Randwerth $\vartheta=c$ positiv und mithin $e^{-2c}=q$ ein ächter Bruch sein. Giebt man nun der ersten

Summe in (43.) die Gestalt:

$$(44.)\qquad (\Sigma) \equiv \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{nS}-e^{-nS}}{q^n-q^{-n}}\cos n\delta = \frac{\partial.}{\partial S}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\frac{e^{nS}+e^{-nS}}{q^n-q^{-n}}\cos n\delta$$

und bemerkt man, dass jedes Glied der hier unter dem Differentiations-Zeichen stehenden Summe in zwei Theile zerlegt werden kann

$$\frac{e^{nS}+e^{-nS}}{n(q^n-q^{-n})}\cos n\delta = \frac{\cos n(\delta+iS)}{n(q^n-q^{-n})}+\frac{\cos n(\delta-iS)}{n(q^n-q^{-n})},$$

von welchen der eine die Grössen δ, S nur in der Verbindung $\delta+iS$, der andere nur in der Verbindung $\delta-iS$ enthält; so ergiebt sich sofort, dass (Σ) folgende Form haben muss:

$$(45.)\qquad (\Sigma) = \frac{\partial.}{\partial S}\{f(\delta+iS)+f(\delta-iS)\}.$$

Aus (44.) und (45.) folgt gegenwärtig:

$$2f(\delta) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\frac{2\cos n\delta}{q^n-q^{-n}},$$

also (nach Fund. pag. 145):

$$2f(\delta) = \log\frac{\Theta\left(\frac{K\delta}{\pi}\right)}{\Theta(0)}+F(q),$$

wo K, K' diejenigen ganzen elliptischen Integrale sind, welche zu unserem ächten Bruch $e^{-2c}=q$ in der Beziehung stehen:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

und wo $F(q)$ *allein* von q abhängt. Substituirt man diesen Werth von $f(\delta)$ in (45.) und bemerkt, dass $F(q)$ bei der Differentiation nach S fortfällt, so ergiebt sich:

$$(\Sigma) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial.}{\partial S}\log\frac{\Theta\left(K\frac{\delta+iS}{\pi}\right).\Theta\left(K\frac{\delta-iS}{\pi}\right)}{\Theta(0).\Theta(0)},$$

d. i.

$$(45^a.)\qquad 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{nS}-e^{-nS}}{q^n-q^{-n}}\cos n\delta = \frac{iK}{\pi}\left\{Z\left(K\frac{\delta+iS}{\pi}\right)-Z\left(K\frac{\delta-iS}{\pi}\right)\right\}.$$

Somit erhalten wir für unsere Reihe (43.) folgenden Ausdruck:

$$(46.)\qquad 2\pi\eta_a^{(p)} = 1-\frac{iK}{\pi}\cdot\left\{\begin{array}{l} Z\left(K\frac{\delta+iS}{\pi}\right)-Z\left(K\frac{\delta-iS}{\pi}\right)\\ +Z\left(K\frac{\sigma+iD}{\pi}\right)-Z\left(K\frac{\sigma-iD}{\pi}\right)\end{array}\right\}.$$

§. 4.

Lösung des Problemes (1.) *für den von zwei Niveau-Curven des* §. 2 *begrenzten ringförmigen Raum. — Allgemeiner Satz über einen beliebigen ringförmigen Raum.* (55.).

Es soll gegenwärtig gezeigt werden, dass sich unser Problem (1.) auch lösen lässt für den ringförmigen Raum, welcher von zwei der in §. 2 behandelten Niveau-Curven begrenzt wird, falls nur dieser Raum von den dort supponirten Massen vollständig frei ist; also für denjenigen Raum, welcher in §. 2 und §. 3 durchgängig mit (R'') bezeichnet wurde. Da sich die hier einzuschlagende Methode der früheren Untersuchung eng anschliesst, so werde ich meistentheils nur andeutend verfahren.

Um die *Green*sche Function $G_p^{(q)}$ zu finden, bedienen wir uns wiederum der in (7.) gegebenen Definition. Aehnlich wie früher nehmen wir für $G_p^{(q)}$ eine Reihe, welche aus den bereits in (27.) aufgestellten einfachen Potentialfunctionen des Raumes (R'') zusammengesetzt ist; setzen also:

$$(47.)\quad 2\pi G_p^{(q)} = A''+B''\vartheta+2\Sigma((Ae^{n\vartheta}+Be^{-n\vartheta})\cos n\omega+(Ce^{n\vartheta}+De^{-n\vartheta})\sin n\omega),$$

und müssen nun die hier vorhandenen Constanten der Art bestimmen, dass der in (7.) angegebenen Randbedingung genügt wird. Diese Randbedingung ist hier eine doppelte:

$$(47^a.)\quad G_b^{(q)} = L_{qb} \quad \text{und} \quad G_\beta^{(q)} = L_{q\beta},$$

wo nämlich q wieder das im Raume (R'') beliebig gewählte Centrum vorstellt, und b, β zwei variable Punkte sind, welche respective dem äusseren und inneren Rande angehören. Sind $\vartheta = c$ und $\vartheta = \gamma$ die Gleichungen der beiden Randcurven, so stellen c und γ zugleich die ϑ-Coordinaten der Punkte b und β vor. Bezeichnen wir die ω-Coordinaten derselben mit ω_b und ω_β, so erhalten wir aus (47):

$$(48.)\quad \begin{cases} 2\pi\,.\,G_b^{(q)} = A''+B''c+2\,.\,\Sigma((Ae^{nc}+Be^{-nc})\cos n\omega_b+(Ce^{nc}+De^{-nc})\sin n\omega_b), \\ 2\pi\,.\,G_\beta^{(q)} = A''+B''\gamma+2\,.\,\Sigma((Ae^{n\gamma}+Be^{-n\gamma})\cos n\omega_\beta+(Ce^{n\gamma}+De^{-n\gamma})\sin n\omega_\beta). \end{cases}$$

Andererseits ergiebt sich für die in (47^a.) enthaltenen Logarithmen durch Anwendung der *Fourier*schen Entwickelung:

$$(49.)\quad \begin{cases} 2\pi L_{qb} = \int_0^{2\pi}(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n(\omega_b-\omega_a))L_{qa}\,d\omega_a, \\ 2\pi L_{q\beta} = \int_0^{2\pi}(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n(\omega_\beta-\omega_a))L_{qa}\,d\omega_a, \end{cases}$$

wo a, α (ebenso wie b, β) zwei respective zum äusseren und inneren Rande gehörige Punkte vorstellen. Bestimmt man jetzt die Constanten A^0, B^0, A, B, C, D der Art, dass zwischen (48.) und (49.) die in (47^a.) verlangte Gleichheit stattfindet, und substituirt diese Werthe der Constanten in (47.), so ist die Entwickelung der *Green*schen Function vollendet. Man erhält:

$$(50.)\quad \begin{cases} 2\pi G_p^{(q)} = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{\gamma-\vartheta}{\gamma-c}+2.\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{nc}}{e^{n\vartheta}}\,\frac{e^{2n\gamma}-e^{2n\vartheta}}{e^{2n\gamma}-e^{2nc}}\cos n(\omega-\omega_a)\right\}L_{qa}\,d\omega_a \\ \qquad +\int_0^{2\pi}\left\{\frac{c-\vartheta}{c-\gamma}+2.\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{n\gamma}}{e^{n\vartheta}}\,\frac{e^{2nc}-e^{2n\vartheta}}{e^{2nc}-e^{2n\gamma}}\cos n(\omega-\omega_\alpha)\right\}L_{q\alpha}\,d\omega_\alpha. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun (ähnlich wie in (39.)) die dem Centrum p entsprechende Randbelegung unseres Raumes (R^0) mit $\eta_a^{(p)}d\omega_a$ und $\eta_\alpha^{(p)}d\omega_\alpha$, so ist (analog mit (40.)):

$$(51.)\qquad G_p^{(q)} = \int_0^{2\pi} d\omega_a\,\eta_a^{(p)}L_{aq}+\int_0^{2\pi} d\omega_\alpha\,\eta_\alpha^{(p)}L_{\alpha q}.$$

Demnach ergeben sich aus (50.) und (51.) für die eben genannte Randbelegung sofort folgende Formeln:

$$(52.)\quad \begin{cases} \eta_a^{(p)}d\omega_a = \frac{d\omega_a}{2\pi}\left\{\frac{\gamma-\vartheta}{\gamma-c}+2.\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{nc}}{e^{n\vartheta}}\,\frac{e^{2n\gamma}-e^{2n\vartheta}}{e^{2n\gamma}-e^{2nc}}\cos n(\omega-\omega_a)\right\}, \\ \eta_\alpha^{(p)}d\omega_\alpha = \frac{d\omega_\alpha}{2\pi}\left\{\frac{c-\vartheta}{c-\gamma}+2.\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{n\gamma}}{e^{n\vartheta}}\,\frac{e^{2nc}-e^{2n\vartheta}}{e^{2nc}-e^{2n\gamma}}\cos n(\omega-\omega_\alpha)\right\}. \end{cases}$$

Hierdurch erhalten wir für unser Problem folgende Lösung:

(53.) Sind c und γ die constanten Werthe, welche ϑ respective am äusseren und inneren Rande des ringförmigen Raumes besitzt; sind ferner ω_a und ω_α die ω-Coordinaten zweier auf dem äusseren und inneren Rande befindlichen Punkte; und sind endlich Φ_a und Φ_α die gegebenen Werthe, welche die unbekannte Function Φ des Problemes (1.) in den eben genannten Punkten besitzt: so ist der Werth, welchen Φ für irgend einen in dem ringförmigen Raume liegenden Punkt $p(\vartheta, \omega)$ besitzt, folgender:

$$\Phi_p = \int_0^{2\pi} d\omega_a\,\eta_a^{(p)}\Phi_a+\int_0^{2\pi} d\omega_\alpha\,\eta_\alpha^{(p)}\Phi_\alpha,$$

wo $\eta_a^{(p)}$, $\eta_\alpha^{(p)}$ die in (52.) angegebenen Ausdrücke vorstellen.

Die Reihen (52.) lassen sich wieder mit Hülfe der *Jacobi*schen Function Z durch geschlossene Ausdrücke darstellen. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$c-\vartheta = D,\quad \omega_a-\omega=\delta,$$
$$\gamma-\vartheta = D',\quad \omega_\alpha-\omega=\delta',$$

ferner den ächten Bruch $e^{-(c-\gamma)}=q$, und

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

so findet man, mit Hülfe der früher abgeleiteten Formel (45^a.), leicht:

$$(54.)\quad \begin{cases} 2\pi\eta_a^{(p)} = \dfrac{\gamma-\vartheta}{\gamma-c}+\dfrac{iK}{\pi}\Big\{Z\Big(K\dfrac{\delta+iD'}{\pi}\Big)-Z\Big(K\dfrac{\delta-iD'}{\pi}\Big)\Big\}, \\ 2\pi\eta_\alpha^{(p)} = \dfrac{c-\vartheta}{c-\gamma}-\dfrac{iK}{\pi}\Big\{Z\Big(K\dfrac{\delta'+iD}{\pi}\Big)-Z\Big(K\dfrac{\delta'-iD}{\pi}\Big)\Big\}. \end{cases}$$

Die hier zur Lösung des Problemes (1.) benutzte Methode ist übrigens einer bei Weitem allgemeineren Anwendung fähig. *Man kann dieselbe und zwar ohne irgend welche Modification sofort bei einem ringförmigen Raume verwenden, der von irgend zwei Niveau-Curven begrenzt wird, mögen die Massen, durch deren Wirkung diese Niveau-Curven entstehen, beschaffen sein wie sie wollen, falls nur der betrachtete ringförmige Raum selber von ihnen frei ist.* Ein Theil derselben kann also in der von dem inneren Rande begrenzten Fläche beliebig ausgebreitet sein, der andere Theil derselben beliebig ausgebreitet sein in dem den äusseren Rand umgebenden Raume der Ebene. Man gelangt auf diese Weise zu folgendem allgemeinen Satz:

(55.) *Kann man für einen von zwei ganz beliebigen Curven begrenzten ringförmigen Raum das Problem* (1.) *in dem Falle lösen, dass die gegebenen Randwerthe constant, aber für den einen und den anderen Rand von verschiedener Grösse sind: so kann man das Problem auch dann lösen, wenn die Randwerthe ganz beliebig gegeben sind.*

Die den beliebig gegebenen Randwerthen entsprechende Lösung Φ lässt sich nämlich vollständig darstellen vermittelst der den constanten Randwerthen entsprechenden Lösung V.

Da diese Function V, wie man sofort übersieht, ein Potential von Massen repräsentirt, welche *ausserhalb* des ringförmigen Raumes liegen, so besitzen die durch $V=$ Const. dargestellten Randcurven in der That die zuvor angegebene Eigenschaft. *Die Methode, deren man sich, wenn V bekannt ist,*

zur Ermittelung von Φ bedienen wird, ist daher, wie man leicht findet, folgende:

„Man bilde aus V zwei andere Functionen ϑ, ω vermittelst der Glei-
„chungen:

$$\vartheta = 2\pi \frac{V}{\int \frac{\partial V}{\partial n} ds}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

„wo das Integral $\int \frac{\partial V}{\partial n} ds$ über den äusseren Rand (ds) ausgedehnt, und darin
„unter n die nach Aussen gerichtete Normale dieses Randes zu verstehen ist;
„und wo der Anfangswerth von ω beliebig gewählt sein kann.

„Man führe sodann ϑ, ω an Stelle von x, y als Coordinaten ein;
„und bezeichne die Coordinaten eines beliebigen Punktes p im Inneren, die
„eines äusseren Randpunktes a und die eines inneren Randpunktes α respective
„mit ϑ, ω selber, mit c, ω_a und mit γ, ω_α, [wo dann c, γ Constante sein
„werden, deren Differenz $c-\gamma$ immer pos. ist].

„Sind nun Φ_a und Φ_α die beliebig gegebenen Randwerthe der unbe-
„kannten Function, so ist der Werth derselben für jeden inneren Punkt p
„dargestellt durch:

$$\Phi_p = \int_0^{2\pi} d\omega_a \eta_a^{(p)} \Phi_a + \int_0^{2\pi} d\omega_\alpha \eta_\alpha^{(p)} \Phi_\alpha,$$

„wo $\eta_a^{(p)}$ und $\eta_\alpha^{(p)}$ die ***vollständig bekannten aus** c, ω_a, γ, ω_α, ϑ, ω **zusam-
„mengesetzten Ausdrücke*** vorstellen, welche bei (52.) als Reihen, bei (54.)
„in geschlossener Gestalt angegeben sind."

§. 5.

Reduction der in Ermittelung der „Greenschen Function" (7.) bestehenden Fundamentalaufgabe auf eine noch einfachere (63.). — Secundäre Formen für die Lösung des Problemes (1.).

Ist im Punkte O eine Masse $+1$ des fingirten Fluidums concentrirt, sind ferner andere Massen M beliebig in der Ebene vertheilt, und bezeichnet man das Potential dieser Massen zusammengenommen in Bezug auf einen variablen Punkt x mit ϑ_x, so lässt sich, wie ich gegenwärtig zeigen werde, unser Problem (1.) für den von einer Niveau-Curve $\vartheta_x =$ Const. begrenzten Raum

(*R*) immer lösen, wenn der Punkt *O* innerhalb, die Massen *M* dagegen sämmtlich ausserhalb dieses Raumes liegen. — Die in §. 2 behandelten Curven verwandeln sich in Curven der eben genannten Art, wenn das dortige Liniensegment gg' unendlich klein gedacht wird; nach einer anderen Seite hin besitzen aber die gegenwärtigen Curven auch wieder eine grössere Allgemeinheit, weil die in §. 2 angenommene Symmetrie der Massenvertheilung hier fortfällt.

Bezeichnet man den Abstand zwischen *O* und x mit ϱ und das Potential der Massen *M* auf x mit W_x, so ist:

$$(56.)\qquad \vartheta_x = \log\varrho + W_x.$$

Nimmt man nun für x irgend einen Punkt, der innerhalb des hier betrachteten Raumes (*R*) liegt, differentiirt sodann ϑ_x nach der Normale n der durch x gehenden Niveau-Curve, und integrirt endlich über alle Elemente ds dieser Curve:

$$\int\frac{\partial\vartheta}{\partial n}ds = \int\frac{\partial\log\varrho}{\partial n}ds + \int\frac{\partial W}{\partial n}ds,$$

so verschwindet das zweite Integral rechter Hand, weil W seiner Definition zufolge das Potential von Massen vorstellt, welche sämmtlich ausserhalb (*R*), mithin auch ausserhalb der Niveau-Curve (ds) liegen. Ausserdem erkennt man leicht, dass das erste Integral rechter Hand in seinem Werthe keine Aenderung erleiden wird, wenn man darin die Integrationscurve (ds) mit einem um *O* beschriebenen Kreise vertauscht. Folglich wird:

$$(57.)\qquad \int\frac{\partial\vartheta}{\partial n}ds = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\varrho}\varrho\,d\varphi = 2\pi,$$

vorausgesetzt, dass n die von Innen nach Aussen laufende Normale bezeichnet. Diese Formel ist analog mit der Gleichung $J=2\pi$ in (19.) §. 2.

Führt man ferner eine Function ω ein, welche den Gleichungen

$$(57^a.)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0$$

genügt und einen beliebigen Anfangswerth besitzen kann, so ergiebt sich (ähnlich wie in §. 2) mit Rücksicht auf (57.):

(58.) ω besitzt in jedem Punkte des Raumes (*R*) unendlich viele Werthe, welche von einander aber nur um Vielfache von 2π verschieden sind.

Um nun die möglichst einfachen Potentialfunctionen für unseren Raum (R) aufzustellen, bemerken wir, dass nach der Definition von ϑ die Werthe von ϑ, $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$ und also nach (57^a.) auch die von $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ an allen Stellen dieses Raumes mit Ausnahme des Punktes O endlich, eindeutig und continuirlich sind, im Punkte O aber unendlich werden. Die aus (56.) entspringenden Formeln:

$$e^{n\vartheta} = \varrho^n . e^{nW}$$

$$e^{n\vartheta}.\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \varrho^n . e^{nW}.\left(\frac{x}{\varrho^2}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

zeigen jedoch, dass $e^{n\vartheta}$ und $e^{n\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ ihre Endlichkeit im Punkte O nicht verlieren falls $n \gtreqless 1$ ist. Da dasselbe natürlich auch von $e^{n\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$ und nach (57^a.) also auch von $e^{n\vartheta}\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $e^{n\vartheta}\frac{\partial\omega}{\partial y}$ gilt, so ergiebt sich sofort, dass

$$F = A^0 \quad \text{und} \quad F = e^{n\vartheta}(A\cos n\omega + B\sin n\omega)$$

Potentialfunctionen des Raumes (R) sind, wenn man darin unter n eine positive ganze Zahl und unter A^0, A, B willkürliche Constanten versteht.

Durch geeignete Zusammensetzung dieser Functionen F findet man nun vermittelst derselben Methode, welche früher angewendet wurde, für die dem Centrum $p(\vartheta, \omega)$ entsprechende Randbelegung unseres Raumes folgende Formel:

$$(59.) \qquad \eta_a^{(p)} d\omega_a = \frac{d\omega_a}{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{n(\vartheta-c)}\cos n(\omega_a-\omega)\right),$$

wo c, ω_a die Coordinaten eines beliebigen Randpunktes a vorstellen, und $\eta_a^{(p)}d\omega_a$ die Masse bezeichnet, mit welcher das zu $d\omega_a$ gehörige Randelement zu belegen ist. Mit Benutzung dieses Werthes von $\eta_a^{(p)}$ ist dann die Lösung unseres Problemes (1.) dargestellt durch:

$$(60.) \qquad \Phi_p = \int_0^{2\pi} d\omega_a \eta_a^{(p)} \Phi_a.$$

Der Werth von $\eta_a^{(p)}$ lässt sich übrigens leicht in geschlossener Gestalt darstellen. Man erhält aus (59.):

$$(61.) \qquad \eta_a^{(p)} d\omega_a = \frac{d\omega_a}{2\pi}.\frac{1-e^{2(\vartheta-c)}}{1-2e^{\vartheta-c}\cos(\omega-\omega_a)+e^{2(\vartheta-c)}}.$$

Wir gelangen also hier zu folgendem *Resultate:*

(62.) Führt man, um das Problem (1.) für die Niveau-Curve $\vartheta = c$ zu lösen, an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y die Variable ϑ selber und die mit dieser durch die Gleichungen (57^a.) verbundene Variable ω ein; bezeichnet man sodann die ω-Coordinate irgend eines Randpunktes (d. i. auf der Curve $\vartheta = c$ gelegenen Punktes) mit ω_a; und bezeichnet man endlich den gegebenen Werth, welchen die unbekannte Function Φ des Problemes (1.) in diesem Punkte besitzt, mit Φ_a: so ist der Werth dieser Function in irgend einem inneren Punkte $p(\vartheta, \omega)$ folgender:

$$2\pi . \Phi_p = \int_0^{2\pi} \Phi_a \frac{(1 - e^{2(\vartheta - c)})\, d\omega_a}{1 - 2e^{\vartheta - c} \cos(\omega_a - \omega) + e^{2(\vartheta - c)}}.$$

Beiläufig bemerkt, liefert diese Formel sofort die Lösung für einen Kreis. Setzt man nämlich die supponirten Massen M gleich Null, so verwandelt sich das hier betrachtete Niveau-Curven-System in ein System concentrischer Kreise. Es verwandelt sich in diesem Fall ϑ in $\log \varrho$, also e^ϑ in den Abstand ϱ des variablen Punktes von O, und ω in den Winkel, welchen ϱ mit einer festen Richtung einschliesst.

Wichtig ist folgende Anwendung unserer Untersuchung. — Wir wollen annehmen, bei einem beliebig gestalteten gegebenen Raume wäre die *Green*sche Function $G^{(q)}$ (7.) *nicht für beliebige* Lagen *sondern nur für eine einzige* Lage des Centrums q bekannt. Der Werth, welchen $G^{(q)}$ in einem variablen Punkte x besitzt, mag mit $G_x^{(q)}$, ferner der Logarithmus des Abstandes $\overline{qx}$ mit L_{qx} bezeichnet sein. Alsdann ist $G_x^{(q)}$ (nach (7.)) das Potential von irgend welchen ausserhalb des Raumes liegenden Massen M in Bezug auf den Punkt x; folglich

$$L_{qx} - G_x^{(q)}$$

das Potential der *äusseren* Massen $-M$, in Verbindung mit einer *innerhalb* R befindlichen nämlich in q concentrirten Masse $+1$. Beachtet man nun ausserdem, dass nach der Definition der *Green*schen Function (7.) $L_{qx} = G_x^{(q)}$ wird, sobald x an eine Stelle des Randes rückt, dass also die Randcurve des gegebenen Raumes (R) dargestellt wird durch:

$$L_{qx} - G_x^{(q)} = 0,$$

so ist klar, dass die Function $L_{qx}-G_x^{(q)}$ in Bezug auf den gegebenen Raum (R) genau denselben Charakter besitzt, wie die zu Anfang dieses §. behandelte Function ϑ_x in Bezug auf den von der Niveau-Curve $\vartheta_x=$ Const. umschlossenen Raum; dass also mit Hülfe der Function $L_{qx}-G_x^{(q)}$ die Lösung unseres Problemes (1) für den hier gegebenen Raum genau in derselben Weise bewerkstelligt werden kann, wie solches dort (in (62.)) mit Hülfe der Function ϑ_x für den Raum der Niveau-Curve $\vartheta_x=$Const ausgeführt wurde. — Also:

(63.) *Ist bei irgend einem gegebenen Raume die Greensche Function $G^{(q)}$ (7.) nur für eine einzige Lage des Centrums q bekannt, für alle anderen Lagen desselben aber unbekannt, so ist dieses bereits ausreichend, um die vollständige Lösung des Problemes (1.) für den gegebenen Raum zu erhalten. — Man findet nämlich dieselbe alsdann durch folgende Methode:*

„Man nehme dasjenige Centrum q, für welches $G^{(q)}$ bekannt ist, zum Anfangs„punkte der Coordinaten x, y, bezeichne den Werth dieser Function $G^{(q)}$ in „irgend einem Punkte (x, y) mit $G^{(q)}(x, y)$, und führe dann zwei neue Functio„nen ϑ, ω ein vermittelst der Gleichungen:

$$\vartheta=\log\sqrt{x^2+y^2}-G^{(q)}(x,y),\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial x}=0.$$

„Bedient man sich nun der Variablen ϑ, ω als Coordinaten an Stelle von „x, y, [wo alsdann die ϑ-Coordinate für sämmtliche Randpunkte Null sein „wird], bezeichnet ferner die ω-Coordinate irgend eines Randpunktes a mit „ω_a, und den gegebenen Werth, welchen die unbekannte Function Φ des „Problemes (1.) in a besitzt, mit Φ_a: so ist der Werth dieser Function für „jeden beliebigen inneren Punkt $p(\vartheta, \omega)$ dargestellt durch:

$$\Phi_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_a\frac{(1-e^{2\vartheta})\,d\omega_a}{1-2e^{\vartheta}\cos(\omega-\omega_a)+e^{2\vartheta}}.\text{“}$$

Es geht hieraus hervor, dass man, wenn die Lösung unseres Problemes (1.) für irgend einen Raum gefunden ist, aus dieser Lösung noch unendlich viele andere *secundäre Lösungen* ableiten kann, welche sich von der ursprünglichen natürlich nur durch eine andere *Form* unterscheiden werden. In der That wird man, sobald eine Methode zur Lösung bekannt ist, vermittelst derselben auch die irgend einem Centrum q entsprechende *Green*sche

Function $G^{(q)}$ bilden können, sodann die eben angegebene auf der Kenntniss von $G^{(q)}$ basirende Methode in Anwendung bringen können, und durch diese zu einer neuen Form der Lösung gelangen.

Der wesentliche Unterschied zwischen diesen verschiedenen Formen der Lösung besteht in der Verschiedenheit der darin enthaltenen Coordinatensysteme. Hat man z. B. beim Kreise die Lösung unseres Problemes (1.) durch Anwendung von Polar-Coordinaten d. h. durch Anwendung eines Systems concentrischer Kreise und eines durch das Centrum gehenden Liniensystems bewerkstelligt; und geht sodann in der eben angegebenen Weise zu einer secundären Lösungs-Methode über, so findet man, dass die hierbei in Anwendung kommenden Coordinaten (ϑ, ω) zwei orthogonalen Kreissystemen zugehören. Die Kreise des einen Systems laufen um das im Inneren des Kreises willkürlich gewählte der secundären Lösung zu Grunde gelegte Centrum q herum, umschliessen dieses zuerst eng dann aus grösserer und grösserer Entfernung, bis sie zuletzt in die Peripherie des gegebenen Kreises übergehen. Daraus ergiebt sich, beiläufig bemerkt, dass die secundäre Methode hier beim Kreise zur Lösung unseres Problemes (1.) für einen *neuen* Raum führt, nämlich für den *von zwei nicht concentrischen Kreisen begrenzten ringförmigen Raum.* Zu einem analogen Resultate gelangt man vermittelst der secundären Lösungs-Methode bei jedem anderen gegebenen Raume.

Halle, im Mai 1861.

Sur quelques formules générales dans le calcul des opérations.

(Par M. *Spottiswoode* à Londres.)

Dans un mémoire qui vient de paraitre dans les *Philosophical Transactions* de Londres j'ai développé la théorie du symbole opératif

$$y\frac{d}{dx}+x\frac{d}{dy},$$

et j'y ai ajouté quelques formules relatives au symbole plus général:

$$x_{i_1}\frac{d}{dx_1}+x_{i_2}\frac{d}{dx_2}+\cdots.$$

Je me propose d'indiquer dans les pages suivantes la méthode par laquelle je suis arrivé aux formules dont il s'agit.

Soit $i_1, i_2, \ldots$ une permutation quelconque de la série $1, 2, \ldots$; et représentons cette permutation par l'équation symbolique

$$i_1, i_2, \ldots = P_i(1, 2, \ldots).$$

De la même manière une seconde permutation quelconque P_j de la série $i_1, i_2, \ldots$ sera représenté par $j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots$, ou, plus simplement, par $ji_1, ji_2, \ldots$ ce qui sera une permutation nouvelle de la série primitive $1, 2, \ldots$. Ecrivons d'une manière symbolique

$$\begin{aligned} ji_1, ji_2, \ldots &= P_{ji}(1, 2, \ldots) \\ = P_j(i_1, i_2, \ldots) &= P_jP_i(1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

ou d'une façon plus abrégée

$$P_{ji} = P_jP_i.$$

Cette notation pourra être étendue à un nombre quelconque de permutations employées successivement.

Soient $x_1, x_2, \ldots$ des variables quelconques; et soit

$$\begin{aligned} \nabla_i &= x_{i_1}\frac{d}{dx_1}+x_{i_2}\frac{d}{dx_2}+\cdots, \\ \nabla_j &= x_{j_1}\frac{d}{dx_1}+x_{j_2}\frac{d}{dx_2}+\cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_i &= x_{i_1}\frac{d'}{dx_1}+x_{i_2}\frac{d'}{dx_2}+\cdots, \\ D_j &= x_{j_1}\frac{d'}{dx_1}+x_{j_2}\frac{d'}{dx_2}+\cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les notations $\frac{d'}{dx_1}, \frac{d'}{dx_2}, \ldots$ qui se trouvent dans $D_i, D_j, \ldots$ signifient que les différentiations dont il s'agit, s'exécutent bien sur les fonctions que l'on s'est abstenu d'écrire et auxquelles s'appliquent les opérations $D_i, D_j, \ldots$, mais que ces différentiations ne s'exécutent point sur les variables $x_1, x_2, \ldots$ en tant qu'elles entrent explicitement comme coefficients dans les expressions $D_i, D_j, \ldots$. Au contraire les différentiations $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \ldots$ qui se trouvent dans $\nabla_i, \nabla_j, \ldots$ s'exécutent indistinctement. Cela posé on trouve

$$\begin{aligned}
D_j D_i &= \nabla_j \nabla_i - \nabla_{ji}, \\
D_k D_j D_i &= \nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_{kj} \nabla_i - \nabla_j \nabla_{ki} - \nabla_k \nabla_{ji} + \nabla_{kji} + \nabla_{jki} \\
D_l D_k D_j D_i &= \nabla_l \nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_{lk} \nabla_j \nabla_i - \nabla_k \nabla_{lj} \nabla_i - \nabla_k \nabla_j \nabla_{li} \\
&\quad - \nabla_l \nabla_{kj} \nabla_i - \nabla_l \nabla_j \nabla_{ki} - \nabla_l \nabla_k \nabla_{ji} \\
&\quad + \nabla_{lkj} \nabla_i + \nabla_j \nabla_{lki} + \nabla_k \nabla_{lji} + \nabla_l \nabla_{jki} \\
&\quad + \nabla_{klj} \nabla_i + \nabla_j \nabla_{kli} + \nabla_k \nabla_{jli} + \nabla_l \nabla_{kji} \\
&\quad + \nabla_{kj} \nabla_{li} + \nabla_{lj} \nabla_{ki} + \nabla_{lk} \nabla_{ji} \\
&\quad - \nabla_{lkji} - \nabla_{klji} - \nabla_{kjli} - \nabla_{ljki} - \nabla_{jlki} - \nabla_{jkli}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de D's et de ∇'s. Il y a des cas particuliers dans lesquels ces expressions prennent une forme plus symmétrique. Si les permutations satisfont à la seconde équation du système

$$P(j,k) = P(k,j), \quad P(k,i) = P(i,k), \quad P(i,j) = P(j,i),$$

le groupe $\nabla_{kj}, \nabla_{ki}, \nabla_{ji}$ pourra être remplacé par le groupe $\nabla_{kj}, \nabla_{ik}, \nabla_{ji}$, dans lequel les indices se trouvent rangés selon l'ordre cyclique. Si les permutations satisfont à la première et à la troisième équation du système écrit, le groupe dont il s'agit pourra au contraire être remplacé par le groupe $\nabla_{jk}, \nabla_{ki}, \nabla_{ij}$. Si de plus les permutations satisfont à la première équation du système

$$\begin{aligned}
P\{i(j,k)\} &= P\{(j,k)i\}, \\
P\{j(k,i)\} &= P\{(k,i)j\}, \\
P\{k(i,j)\} &= P\{(i,j)k\},
\end{aligned}$$

l'expression pour $D_k D_j D_i$ s'écrira de la manière suivante:

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_{kj} - \nabla_j \nabla_{ik} - \nabla_k \nabla_{ji} + 2\nabla_{kji}$$

ou de celle-ci:

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_{jk} - \nabla_j \nabla_{ki} - \nabla_k \nabla_{ij} + 2\nabla_{kji}.$$

selon que ou la seconde, ou la première et la troisième condition du premier système auront lieu. Si la seconde et la troisième condition du second système sont remplies, la même expression prend l'une ou l'autre des formes

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_{kj} \nabla_i - \nabla_{ik} \nabla_j - \nabla_{ji} \nabla_k + 2\nabla_{jik}$$

ou

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_i - \nabla_{jk} \nabla_i - \nabla_{ki} \nabla_j - \nabla_{ij} \nabla_k + 2\nabla_{jik}.$$

Dans le cas de $D_l D_k D_j D_i$ il serait presque nécessaire de particulariser les conditions auxquelles on assujettit les permutations.

En revenant au cas de $D_j D_i$, on établit immédiatement le système quadratique

$$D_i^2 = \nabla_i^2 - \nabla_{i^2},$$
$$D_j D_i = \nabla_j \nabla_i - \nabla_{ji},$$
$$D_j^2 = \nabla_j^2 - \nabla_{j^2}$$

et on en compose la rélation plus générale

$$(abc)\widehat{(}D_j \nabla_i)^2 = (abc)\widehat{(}\nabla_j \nabla_i)^2 - (abc)\widehat{(}\nabla'_j \nabla'_i)^2$$

dans laquelle

$$(abc)\widehat{(}\nabla'_j \nabla'_i)^2 = a\nabla_{j^2} + 2b\nabla_{ji} + c\nabla_{i^2}.$$

Ne perdons pas de vue d'ailleurs que dans une équation quelconque que l'on écrit les symboles j, i devront toujours suivre le même ordre dans les deux parties de l'équation.

Pour le troisième degré on trouve

$$D_j^3 = \nabla_j^3 - 3\nabla_j \nabla_{j^2} + 2\nabla_{j^3}$$
$$D_j^2 D_i = \nabla_j^2 \nabla_i - \nabla_{j^2} \nabla_i - 2\nabla_j \nabla_{ji} + 2\nabla_{j^2 i}$$
$$= \nabla_j \nabla_i \nabla_j - \nabla_{ji} \nabla_j - \nabla_i \nabla_{j^2} - \nabla_j \nabla_{ij} + \nabla_{jij} + \nabla_{ij^2}$$
$$= \nabla_i \nabla_j^2 - \nabla_{ij} \nabla_j - \nabla_j \nabla_{ij} - \nabla_i \nabla_{j^2} + \nabla_{ij^2} + \nabla_{jij}$$

. . . .

d'où l'on tire le système cubique

$$D_j^3 = \nabla_j^3 - 3\nabla_j \nabla_{j^2} + 2\nabla_{j^3},$$
$$3D_j^2 D_i = \nabla_j^2 \nabla_i + \nabla_j \nabla_i \nabla_j + \nabla_i \nabla_j^2$$
$$- \nabla_{j^2} \nabla_i - \nabla_{ji} \nabla_j - \nabla_{ij} \nabla_j - 2\nabla_i \nabla_{j^2} - 2\nabla_j \nabla_{ij} - 2\nabla_j \nabla_{ji}$$
$$+ 2\nabla_{j^2 i} + 2\nabla_{jij} + 2\nabla_{ij^2},$$
$$3D_j D_i^2 = \nabla_j \nabla_i^2 + \nabla_i \nabla_j \nabla_i + \nabla_i^2 \nabla_j$$
$$- \nabla_{i^2} \nabla_j - \nabla_{ij} \nabla_i - \nabla_{ji} \nabla_i - 2\nabla_j \nabla_{i^2} - 2\nabla_i \nabla_{ji} - 2\nabla_i \nabla_{ij}$$
$$+ 2\nabla_{ji^2} + 2\nabla_{iji} + 2\nabla_{i^2 j},$$
$$D_i^3 = \nabla_i^3 - 3\nabla_i \nabla_{i^2} + 2\nabla_{i^3}.$$

Or

$$(abc\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i)^2 = a\nabla_j^2+b(\nabla_j\nabla_i+\nabla_i\nabla_j)+c\nabla_i^2,$$

$$(abcd\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i)^3$$
$$= a\nabla_j^3+b(\nabla_j^2\nabla_i+\nabla_j\nabla_i\nabla_j+\nabla_i\nabla_j^2)+c(\nabla_j\nabla_i^2+\nabla_i\nabla_j\nabla_i+\nabla_i^2\nabla_j)+d\nabla_i^3,$$

$$(abcd\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i)^2$$
$$= a\nabla_j\nabla_{j2}+b(\nabla_i\nabla_{ji}+\nabla_j\nabla_{ij}+\nabla_i\nabla_{j2})+c(\nabla_i\nabla_{ji}+\nabla_i\nabla_{ij}+\nabla_j\nabla_{i2})+d\nabla_i\nabla_{i2},$$

$$(abcd\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i\widehat{)^2(}\nabla_j\nabla_i)$$
$$= a\nabla_{j2}\nabla_j+b(\nabla_{ji}\nabla_j+\nabla_{ij}\nabla_j+\nabla_{j2}\nabla_i)+c(\nabla_{ji}\nabla_i+\nabla_{ij}\nabla_i+\nabla_{i2}\nabla_j)+d\nabla_{i2}\nabla_i,$$

$$(abcd\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i)^3$$
$$= a\nabla_{j3}+b(\nabla_{j2i}\nabla_{jij}+\nabla_{ij2})+c(\nabla_{ji2}+\nabla_{iji}+\nabla_{i2j})+d\nabla_{i3}$$

d'où

$$(abcd\widehat{)(}D_jD_i)^3$$
$$= (abcd\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i)^3-2(abcd\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i)^2-(abcd\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i\widehat{)^2(}\nabla_j\nabla_i)+2(abcd\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i)^3$$

équation que l'on peut écrire symboliquement ainsi:

$$(abcd\widehat{)(}D_jD_i)^3 = (abcd\widehat{)(}\begin{vmatrix} (\nabla_j\nabla_i) & 1 & 0 \\ (\nabla'_j\nabla'_i)^2 & (\nabla_j\nabla_i) & 2 \\ (\nabla'_j\nabla'_i)^3 & (\nabla'_j\nabla'_i)^2 & (\nabla_j\nabla_i) \end{vmatrix}.$$

En se bornant au cas de deux facteurs opératifs, on a les formules suivantes:

$$\begin{aligned}(abcd\widehat{)(}D_jD_i)^3 &= aD_jD_j^2+b(\nabla_iD_{j2}+\nabla_jD_{ji}+\nabla_jD_{ij})+c(\nabla_iD_{ij}+\nabla_iD_{ji}+\nabla_jD_{i2})+d\nabla_iD_i^2\\ &\quad -2a\nabla'_jD_j^2-2b(\nabla'_iD_{j2}+\nabla'_jD_{ji}+\nabla'_jD_{ij})-2c(\nabla'_iD_{ij}+\nabla'_iD_{ji}+\nabla'_jD_{i2})\\ &\quad -2d\nabla'_iD_i^2\\ &= (abcd\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i\widehat{)(}D_jD_i)^2-2(abcd\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i\widehat{)(}D_jD_i)^2,\end{aligned}$$

de même:

$$(abcde\widehat{)(}D_jD_i)^4 = (abcde\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i\widehat{)(}D_jD_i)^3-3(abcde\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i\widehat{)(}D_jD_i)^3$$

et pour le $n^{\text{ième}}$ degré:

$$(ab\ldots\widehat{)(}D_jD_i)^n = (ab\ldots\widehat{)(}\nabla_j\nabla_i\widehat{)(}D_jD_i)^{n-1}-(n-1)(ab\ldots\widehat{)(}\nabla'_j\nabla'_i\widehat{)(}D_jD_i)^{n-1}$$

ou

$$(ab\ldots\widehat{)(}D_jD_i)^n = (ab\ldots\widehat{)(}\begin{vmatrix} (\nabla_j\nabla_i) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ (\nabla'_j\nabla'_i)^2 & (\nabla_j\nabla_i) & 2 & \ldots & 0 \\ (\nabla'_j\nabla'_i)^3 & (\nabla'_j\nabla'_i)^2 & (\nabla_j\nabla_i) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\nabla'_j\nabla'_i)^{n-1} & (\nabla'_j\nabla'_i)^{n-2} & (\nabla'_j\nabla'_i)^{n-3} & \ldots & (\nabla_j\nabla_i) \end{vmatrix}.$$

Pour montrer que la même loi a lieu dans le cas de plusieurs facteurs opératifs, introduisons un troisième facteur D_k; et, pour abréger les formules, nous n'écrivons que les indices, de sorte que dans les calculs suivants on écrira ijk au lieu de $\nabla_i\nabla_j\nabla_k$; $i'j'k$ au lieu de $\nabla'_i\nabla'_j\nabla_k$ ou $\nabla_{ij}\nabla_k$; et ainsi de suite. Cela posé on aura

$$\begin{aligned}
D_kD_jD_i &= kji-k'j'i-jk'i'-kj'i'+k'j'i'+j'k'i'\\
&= jki-j'k'i-kj'i'-jk'i'+j'k'i'+k'j'i'\\
&= ijk-i'j'k-ji'k'-ij'k'+i'j'k'+j'i'k'\\
&= kij-k'i'j-ik'j'-ki'j'+k'i'j'+i'k'j'\\
&= ikj-i'k'j-ki'j'-ik'j'+i'k'j'+k'i'j'\\
&= jik-j'i'k-ij'k'-ji'k'+j'i'k'+i'j'k'
\end{aligned}$$

d'ou l'on tire le système cubique

$$\begin{aligned}
6D_kD_jD_i &= kji+jki+ijk+kij+ikj+jik\\
&\quad -k'j'i-j'k'i-2ik'j'-2ij'k'\\
&\quad -i'k'j-k'i'j-2ji'k'-2jk'i'\\
&\quad -j'i'k-i'j'k-2kj'i'-2ki'j'\\
&\quad +2(k'j'i'+j'k'i'+i'j'k'+k'i'j'+i'k'j'+j'i'k'),\\
3D_k^2D_j &= k^2j+kjk+jk^2+2(j'^2k'+j'k'j'+k'j'^2)\\
&\quad -k'^2j-k'j'k-j'k'j-2(jk'^2+kj'k'+kk'j'),\\
3D_kD_j^2 &= kj^2+jkj+j^2k+2(k'j'^2+j'k'j'+j'^2k')\\
&\quad -j'^2k-j'k'j-k'j'j-2(kj'^2+jk'j'+jj'k'),\\
3D_i^2D_k &= i^2k+iki+ki^2+2(i'^2k'+i'k'i'+k'i'^2)\\
&\quad -i'^2k-i'k'i-k'i'i-2(ki'^2+ik'i'+ii'k'),\\
3D_iD_k^2 &= ik^2+kik+k^2i+2(i'k'^2+k'i'k'+k'^2i')\\
&\quad -k'^2i-k'i'k-i'k'k-2(ik'^2+ki'k'+kk'i'),\\
3D_j^2D_i &= j^2i+jij+ij^2+2(j'^2i'+j'i'j'+i'j'^2)\\
&\quad -j'^2i-j'i'j-i'j'j-2(ij'^2+ji'j'+jj'i'),\\
3D_jD_i^2 &= ji^2+iji-i^2j+2(j'i'^2+i'j'i'+i'^2j')\\
&\quad -i'^2j-i'j'i-j'i'i-2(ji'^2+ij'i'+ii'j'),\\
D_k^3 &= k^3-3kk'^2+2k'^3,\\
D_j^3 &= j^3-3jj'^2+2j'^3,\\
D_i^3 &= i^3-3ii'^2+2i'^3.
\end{aligned}$$

On a

$$(abcff_1gg_1hh_1e)(ijk)(ijk)^2$$
$$= abk^2 - bjf^2 - cii^2$$
$$-f\,ji^2 - ij\,i - ii\,j - f_1\,ij - ji\,j - jj\,i$$
$$-g\,ik^2 - ki\,k - kk\,i - g_1\,ki^2 - ik\,i - ii\,k$$
$$-h\,kj^2 - jk\,j - jj\,k - h_1\,ik^2 - kj\,k - kk\,j$$
$$-e\,ij\,k - ik\,j - jk\,i - ji\,k - ki\,j - kj\,i$$

Et on

$$(abcff_1gg_1hh_1e)(D_1D_2D_3)^3$$
$$= (ab\ldots)[illegible] - 2(ab\ldots)[illegible]$$
$$- (ab\ldots)[illegible] - 2(ab\ldots)[illegible]^3$$

et comme les formules, que nous avons établies dans le cas de deux facteurs opératifs D_1D_2, peuvent s'étendre au cas de trois, on conclut qu'en général on a la formule

$$(ab\ldots f\ldots)(D_1D_2\ldots)^n = (ab\ldots)\begin{vmatrix} (\ldots)_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ (\ldots)^2 & (\ldots) & 2 & \ldots & 0 \\ (\ldots)^3 & (\ldots)^2 & (\ldots) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\ldots)^n & (\ldots)^{n-1} & (\ldots)^{n-2} & \ldots & (\ldots) \end{vmatrix}$$

Pour calculer l'effet des opérations ∇_i sur une fonction donnée, soit proposée la suivante

$$u = \Sigma(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots$$

dans laquelle $(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)$ représente une seule quantité, et où l'on a

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots = n.$$

Cela posé on trouve

$$\nabla_i u = \Sigma(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)\Big\{\alpha_1 x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{i_1}^{\alpha_{i_1}+1}\ldots$$
$$+\alpha_2 x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_{i_2}^{\alpha_{i_2}+1}\ldots$$
$$+\cdots\Big\}$$
$$= \Sigma\Big\{(\alpha_1+1)\big(1^{\alpha_1+1}2^{\alpha_2}\ldots i_1^{\alpha_{i_1}-1}\ldots\big)$$
$$+(\alpha_2+1)\big(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2+1}\ldots i_2^{\alpha_{i_2}-1}\ldots\big)$$
$$+\cdots\Big\}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots$$
$$= \Sigma\Big\{(\alpha_1+1)e^{\frac{d}{d\alpha_1}-\frac{d}{d\alpha_{i_1}}}+(\alpha_2+1)e^{\frac{d}{d\alpha_2}-\frac{d}{d\alpha_{i_2}}}+\cdots\Big\}(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots$$

De la même manière on s'élève aux formules plus générales

$$\nabla_i^p u = \Sigma \left\{ \Sigma(\alpha_r+1) e^{\frac{d}{d\alpha_r} - \frac{d}{d\alpha_{i_r}}} \right\}^p (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$$

et

$$F(\dots \nabla_j \nabla_i) u = \Sigma F \left\{ \dots,\ \Sigma(\alpha_s+1) e^{\frac{d}{d\alpha_s} - \frac{d}{d\alpha_{j_s}}},\ \Sigma(\alpha_r+1) e^{\frac{d}{d\alpha_r} - \frac{d}{d\alpha_{i_r}}} \right\} (1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$$

où il est toujours essentiel de conserver inaltéré l'ordre des multiplications.

Considérons le cas où les symboles de simple différentiation sont multipliés par des fonctions lineáres des variables. Soient

$$\begin{array}{lll} u_{11} = \alpha_{11} x_1 + \beta_{11} x_2 + \cdots, & u_{12} = \alpha_{12} x_1 + \beta_{12} x_2 + \cdots, & \dots \\ u_{21} = \alpha_{21} x_1 + \beta_{21} x_2 + \cdots, & u_{22} = \alpha_{22} x_1 + \beta_{22} x_2 + \cdots, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$\nabla_1 = u_{11} \frac{d}{dx_1} + u_{12} \frac{d}{dx_2} + \cdots$$

$$\nabla_2 = u_{21} \frac{d}{dx_1} + u_{22} \frac{d}{dx_2} + \cdots$$

$$\dots\dots\dots$$

Alors

$$\begin{aligned} D_2 D_1 = {} & \nabla_2 \nabla_1 - \{(\alpha_{11}\alpha_{21} + \beta_{11}\alpha_{22} + \cdots) x_1 + (\alpha_{11}\beta_{21} + \beta_{11}\beta_{22} + \cdots) x_2 + \cdots\} \frac{d}{dx_1} \\ & - \{(\alpha_{12}\alpha_{21} + \beta_{12}\alpha_{22} + \cdots) x_1 + (\alpha_{12}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{22} + \cdots) x_2 + \cdots\} \frac{d}{dx_2} \\ & - \cdots \end{aligned}$$

Or, les coefficients des x sont tous compris dans le produit

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

et les termes de chaque ligne et de chaque colonne correspondent de sorte qu'en posant

$$\begin{array}{l} (a \quad b \quad \dots \widehat{)(} x x_1 \dots \widehat{)(} y y_1 \dots) \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{l} (a\, x + b\, x_1 + \cdots) y \\ + (a_1 x + b_1 x_1 + \cdots) y_1 \\ + \cdots \end{array}$$

on peut écrire

$$D_2D_1 = \nabla_2\nabla_1 - \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right| \widehat{\Big)\Big(} x_1x_2\dots \widehat{\Big)\Big(} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots\Big)$$

De la même manière on trouve

$$\begin{aligned} D_3D_2D_1 = {} & \nabla_3\nabla_2\nabla_1 - \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \beta_{21} & \dots \\ \alpha_{22} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right| \widehat{\Big)\Big(} x_1x_2\dots \widehat{\Big)\Big(} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots\Big)\nabla_1 \\ & - \nabla_2\left(\begin{array}{ccc} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right| \widehat{\Big)\Big(} x_1x_2\dots \widehat{\Big)\Big(} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots\Big) \\ & - \nabla_3\left(\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right| \widehat{\Big)\Big(} x_1x_2\dots \widehat{\Big)\Big(} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots\Big) \\ & + 2\left(\begin{array}{ccc} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right| \widehat{\Big)\Big(} x_1x_2\dots \widehat{\Big)\Big(} \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots\Big). \end{aligned}$$

En se servant d'une notation symbolique dont la signification est manifeste, on peut mettre cette expression sous la forme

$$\nabla_3\nabla_2\nabla_1 - \nabla'_3\nabla'_2\nabla_1 - \nabla_2\nabla'_3\nabla'_1 - \nabla_3\nabla'_2\nabla'_1 + 2\nabla'_3\nabla'_2\nabla'_1.$$

Rélativement aux produits symboliques $\nabla'_3\nabla'_2$, $\nabla'_3\nabla'_1$, $\nabla'_2\nabla'_1$, $\nabla'_3\nabla'_2\nabla'_1$, il est essentiel de se souvenir que quand on forme les produits de déterminants tels que le suivant

$$\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \beta_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|$$

les lignes verticales doivent remplacer les lignes horizontales et vice versa dans le dernier déterminant de chaque produit. De plus, si l'on convient de remplacer dans le développement des produits chaque terme de la forme

$\nabla'_3\nabla_2\nabla'_1$ par le suivant $\nabla_2\nabla'_3\nabla'_1$, on peut écrire

$$D_3D_2D_1 = \begin{vmatrix} \nabla_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla_1 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière formule peut aussi être déduite de celle pour D_2D_1 et de la considération que (D'_3, D'_2, D'_1, étant des symboles analogues à ∇'_3, ∇'_2, ∇'_1) on a

$$\begin{aligned} D_3D_2D_1 &= \nabla_3D_2D_1 - D'_3D'_2D_1 - D'_3D_2D'_1 \\ &= \nabla_3(\nabla_2\nabla_1 - \nabla'_2\nabla'_1) - \nabla_3(\nabla'_2\nabla_1 - \nabla'_2\nabla'_1) - \nabla'_3(\nabla_2\nabla'_1 - \nabla'_2\nabla'_1). \end{aligned}$$

De la même manière on trouve aussi

$$D_4D_3D_2D_1 = \nabla_4D_3D_2D_1 - D'_4D'_3D_2D_1 - D'_4D_3D'_2D_1 - D'_4D_3D_2D'_1$$

$$= \nabla_4\begin{vmatrix} \nabla_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla_1 \end{vmatrix} - \nabla'_4\begin{vmatrix} \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla_1 \end{vmatrix} - \nabla'_4\begin{vmatrix} \nabla_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla_1 \end{vmatrix} - \nabla'_4\begin{vmatrix} \nabla_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \nabla_4 & \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_4 & \nabla_3 & \nabla'_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_4 & \nabla'_3 & \nabla_2 & \nabla'_1 \\ \nabla'_4 & \nabla'_3 & \nabla'_2 & \nabla_1 \end{vmatrix}$$

et en général

$$D_nD_{n-1}\dots D_2D_1$$

$$= \nabla_nD_{n-1}\dots D_2D_1 - D'_nD'_{n-1}\dots D_2D_1 - \dots - D'_nD_{n-1}\dots D'_2D_1 - D'_nD_{n-1}\dots D_2D'_1$$

$$= \nabla_n\begin{vmatrix} \nabla_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \nabla'_{n-1} & \nabla_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla'_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla_1 \end{vmatrix} - \nabla'_n\begin{vmatrix} \nabla'_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \nabla'_{n-1} & \nabla_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla'_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla_1 \end{vmatrix} - \dots - \nabla'_n\begin{vmatrix} \nabla_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \nabla'_{n-1} & \nabla_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla'_{n-1} & \nabla'_{n-2} & \dots & \nabla'_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \nabla_n & \nabla'_{n-1} & \dots & \nabla'_1 \\ \nabla'_n & \nabla_{n-1} & \dots & \nabla'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla'_n & \nabla'_{n-1} & \dots & \nabla_1 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi comme dans le cas de deux variables déterminer les expressions pour les opérations de la forme

$$s_1s_2\dots s_m\frac{d^m}{dx^p\,dy^q\dots}$$

où

$$s = \alpha x + \beta y + \cdots,$$
$$m = p + q + \cdots$$

c. à d. les calculer en termes de $s_i \frac{d}{dx}$, $s_i \frac{d}{dy}$, ... Mais, en égard à mon mémoire ci-dessus cité, il suffira de rappeler les formules sans les démontrer. Dans le cas de trois variables et de trois fonctions s on a:

$$6 s s_1 s_2 \frac{d^3}{dx\,dy\,dz}$$

$$= s\frac{d}{dx}\left(s_1 \frac{d}{dy} - \beta_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dz} - 2\gamma_2\right) + s\frac{d}{dx}\left(s_1 \frac{d}{dz} - \gamma_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - 2\beta_2\right)$$
$$+ s\frac{d}{dy}\left(s_1 \frac{d}{dz} - \gamma_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dx} - 2\alpha_2\right) + s\frac{d}{dy}\left(s_1 \frac{d}{dx} - \alpha_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dz} - 2\gamma_2\right)$$
$$+ s\frac{d}{dz}\left(s_1 \frac{d}{dx} - \alpha_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - 2\beta_2\right) + s\frac{d}{dz}\left(s_1 \frac{d}{dy} - \beta_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dx} - 2\alpha_2\right)$$

ou bien

$$= \left(s\frac{d}{dx} - 2\alpha\right)\left(s_1 \frac{d}{dy} - \beta_1\right) s_2 \frac{d}{dz} + \left(s\frac{d}{dx} - 2\alpha\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - \beta_2\right) s_1 \frac{d}{dz}$$
$$+ \left(s_1\frac{d}{dx} - 2\alpha_1\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - \beta_2\right) s \frac{d}{dz} + \left(s_1\frac{d}{dx} - 2\alpha_1\right)\left(s \frac{d}{dy} - \beta\right) s_2 \frac{d}{dz}$$
$$+ \left(s_2\frac{d}{dx} - 2\alpha_2\right)\left(s \frac{d}{dy} - \beta\right) s_1 \frac{d}{dz} + \left(s_2\frac{d}{dx} - 2\alpha_2\right)\left(s_1 \frac{d}{dy} - \beta_1\right) s \frac{d}{dz}.$$

Lorsque s, s_1, s_2 ne sont plus des fonctions linéaires mais des fonctions quelconques de x, y, z on a la formule plus générale

$$6 s s_1 s_2 \frac{d^3}{dx\,dy\,dz}$$

$$= \left(s\frac{d}{dx} - 2\frac{ds}{dx}\right)\left(s_1 \frac{d}{dy} - \frac{ds_1}{dy}\right) s_2 \frac{d}{dz} + \left(s\frac{d}{dx} - 2\frac{ds}{dx}\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - \frac{ds_2}{dy}\right) s_1 \frac{d}{dz}$$
$$+ \left(s_1\frac{d}{dx} - 2\frac{ds_1}{dx}\right)\left(s_2 \frac{d}{dy} - \frac{ds_2}{dy}\right) s \frac{d}{dz} + \left(s_1\frac{d}{dx} - 2\frac{ds_1}{dx}\right)\left(s \frac{d}{dy} - \frac{ds}{dy}\right) s_2 \frac{d}{dz}$$
$$+ \left(s_2\frac{d}{dx} - 2\frac{ds_2}{dx}\right)\left(s \frac{d}{dy} - \frac{ds}{dy}\right) s_1 \frac{d}{dz} + \left(s_2\frac{d}{dx} - 2\frac{ds_2}{dx}\right)\left(s_1 \frac{d}{dy} - \frac{ds_1}{dy}\right) s \frac{d}{dz}.$$

Je prends pour exemple de la théorie précédente le cas de trois variables x, y, z.

Soit

$$\begin{aligned}
P &= x, y, z,\\
P_1 &= x, z, y,\\
P_2 &= z, y, x,\\
P_3 &= y, x, z,\\
P_4 &= y, z, x,\\
P_5 &= z, x, y,\\
\nabla &= x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz},\\
\nabla_1 &= x\frac{d}{dx}+z\frac{d}{dy}+y\frac{d}{dz},\\
\nabla_2 &= z\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+x\frac{d}{dz},\\
\nabla_3 &= y\frac{d}{dx}+x\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz},\\
\nabla_4 &= y\frac{d}{dx}+z\frac{d}{dy}+x\frac{d}{dz},\\
\nabla_5 &= z\frac{d}{dx}+x\frac{d}{dy}+y\frac{d}{dz}.
\end{aligned}$$

Au lieu de P_i, symbole de l'une quelconque des permutations, j'écris, pour abréger, le seul indice i, alors la composition des permutations s'exprimera par les équations symboliques:

$$\begin{array}{ccccc}
1^2=0 & 2^2=0 & 3^2=0 & 4^2=5 & 5^2=4\\
 & 23=4 & 31=4 & 12=4 & \\
 & 32=5 & 13=5 & 21=5 & \\
 & 14=2 & 24=3 & 34=1 & \\
 & 41=3 & 42=1 & 43=2 & \\
 & 15=3 & 25=1. & 35=2 & \\
 & 51=2 & 52=3 & 53=1 & \\
 & & 45=0 \quad 54=0 & &
\end{array}$$

d'où

$$D_1^2=\nabla_1^2-\nabla \quad D_2^2=\nabla_2^2-\nabla \quad D_3^2=\nabla_3^2-\nabla \quad D_4^2=\nabla_4^2-\nabla_5 \quad D_5^2=\nabla_5^2-\nabla_4$$

$$\begin{array}{lll}
D_2D_3=\nabla_2\nabla_3-\nabla_4 & D_3D_1=\nabla_3\nabla_1-\nabla_4 & D_1D_2=\nabla_1\nabla_2-\nabla_4\\
\quad\;\;\;=\nabla_3\nabla_2-\nabla_5 & \quad\;\;\;=\nabla_1\nabla_3-\nabla_5 & \quad\;\;\;=\nabla_2\nabla_1-\nabla_5\\
D_1D_4=\nabla_1\nabla_4-\nabla_2 & D_2D_4=\nabla_2\nabla_4-\nabla_3 & D_3D_4=\nabla_3\nabla_4-\nabla_1\\
\quad\;\;\;=\nabla_4\nabla_1-\nabla_3 & \quad\;\;\;=\nabla_4\nabla_2-\nabla_1 & \quad\;\;\;=\nabla_4\nabla_3-\nabla_2
\end{array}$$

$$D_1 D_5 = \nabla_1 \nabla_5 - \nabla_3 \qquad D_2 D_5 = \nabla_2 \nabla_5 - \nabla_1 \qquad D_3 D_5 = \nabla_3 \nabla_5 - \nabla_2$$
$$= \nabla_5 \nabla_1 - \nabla_2 \qquad = \nabla_5 \nabla_2 - \nabla_3 \qquad = \nabla_5 \nabla_3 - \nabla_1$$
$$D_4 D_5 = \nabla_4 \nabla_5 - \nabla$$
$$= \nabla_5 \nabla_4 - \nabla.$$

De là on déduit

$$\begin{aligned}
&(abcdefghf_1 g_1 h_1 f_2 g_2 h_2 k)\frown(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5)^2 \\
= &(abcdefghf_1 g_1 h_1 f_2 g_2 h_2 k)\frown(\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3 \nabla_4 \nabla_5)^2 \\
&-(a+b+c+2k)\nabla \\
&-(g_1+h_1+g_2+h_2)\nabla_1 \\
&-(h_1+f_1+h_2+f_2)\nabla_2 \\
&-(f_1+g_1+f_2+g_2)\nabla_3 \\
&-(f+g+h+e)\nabla_4 \\
&-(f+g+h+d)\nabla_5.
\end{aligned}$$

Pour le troisième ordre on trouve

$$1^3 = 1 \quad 2^3 = 2 \quad 3^3 = 3 \quad 4^3 = 0 \quad 5^3 = 0$$

$2^2 3 = 3$	$232 = 1$	$32^2 = 3$	$3^2 2 = 2$	$323 = 1$	$23^2 = 2$
$3^2 1 = 1$	$313 = 2$	$13^2 = 1$	$1^2 3 = 3$	$131 = 2$	$31^2 = 3$
$1^2 2 = 2$	$121 = 3$	$21^2 = 2$	$2^2 1 = 1$	$212 = 3$	$12^2 = 1$
$4^2 1 = 2$	$414 = 1$	$14^2 = 3$	$1^2 4 = 4$	$141 = 5$	$41^2 = 4$
$4^2 2 = 3$	$424 = 2$	$24^2 = 1$	$2^2 4 = 4$	$242 = 5$	$42^2 = 4$
$4^2 3 = 1$	$434 = 3$	$34^2 = 2$	$3^2 4 = 4$	$343 = 5$	$43^2 = 4$
$5^2 1 = 3$	$515 = 1$	$15^2 = 2$	$1^2 5 = 5$	$151 = 4$	$51^2 = 5$
$5^2 2 = 1$	$525 = 2$	$25^2 = 3$	$2^2 5 = 5$	$252 = 4$	$52^2 = 5$
$5^2 3 = 2$	$535 = 3$	$35^2 = 1$	$3^2 5 = 5$	$353 = 4$	$53^2 = 5$
$4^2 5 = 4$	$454 = 4$	$54^2 = 4$	$5^2 4 = 5$	$545 = 5$	$45^2 = 5$
$145 = 1$	$451 = 1$	$514 = 3$	$415 = 2$	$154 = 1$	$541 = 1$
$245 = 2$	$452 = 2$	$524 = 1$	$425 = 1$	$354 = 3$	$542 = 3$
$345 = 3$	$453 = 3$	$534 = 2$	$435 = 1$	$354 = 3$	$543 = 3$
$234 = 5$	$342 = 4$	$423 = 5$	$324 = 0$	$243 = 0$	$432 = 0$
$314 = 5$	$143 = 4$	$431 = 5$	$134 = 0$	$341 = 0$	$413 = 0$
$124 = 5$	$241 = 4$	$412 = 5$	$214 = 0$	$142 = 0$	$421 = 0$
$235 = 0$	$352 = 0$	$523 = 0$	$325 = 4$	$253 = 5$	$532 = 4$
$315 = 0$	$153 = 0$	$531 = 0$	$135 = 4$	$351 = 5$	$513 = 4$
$125 = 0$	$251 = 0$	$512 = 0$	$215 = 4$	$152 = 5$	$521 = 4$
$123 = 2$	$231 = 3$	$312 = 1$	$213 = 1$	$132 = 3$	$321 = 2.$

Introduisons des signes abrégés pour les coefficients de manière que le lettre qui forme la seconde partie d'une quelconque des équations ci-dessous écrites soit le coefficient de l'expression qui en forme la première partie:

$$1^3 = a \quad 2^3 = b \quad 3^3 = c \quad 4^3 = d \quad 5^3 = e$$

$$\begin{array}{lll}
2^2 3 = f & 3^2 1 = g & 1^2 2 = h \\
23^2 = f_1 & 31^2 = g_1 & 12^2 = h_1 \\
1^2 4 = l & 2^2 4 = m & 3^2 4 = n \\
14^2 = l_1 & 24^2 = m_1 & 34^2 = n_1 \\
1^2 5 = p & 2^2 5 = q & 3^2 5 = r \\
15^2 = p_1 & 25^2 = q_1 & 35^2 = r_1
\end{array}$$

$$4^2 5 = k \quad 45^2 = k_1$$

$$\begin{array}{lll}
145 = s & 245 = t & 345 = u \\
234 = s_1 & 314 = t_1 & 124 = u_1 \\
235 = s_2 & 315 = t_2 & 125 = u_2
\end{array}$$

$$123 = v$$

on aura, après toutes reductions

$$(abcdefghf_1g_1h_1lmnl_1m_1n_1pqrp_1q_1r_1stus_1t_1u_1s_2t_2u_2v)\widehat{}(D_1D_2D_3D_4D_5)^3$$

$$\begin{aligned}
= \left.\begin{aligned}
& ax^3+(c+d+3u+3u_1)y^3+(b+e+3q+3q_1)z^3 \\
& +3(f_1+m_1+r+k+2u+2s_1)y^2z+3(f+m+r_1+k_1+2t+2s_2)yz^2 \\
& +3(h_1+p_1+2u)z^2x+3(h+p)zx^2 \\
& +3(q_1+l)x^2y+3(q+l+2t_1)xy^2 \\
& +6(s+u_1+t_2+v)xyz
\end{aligned}\right\} & \frac{d^3}{dx^3}+\cdots \\
\left.\begin{aligned}
& +(f_1+n+q_1+k_1+2u+2s_2)x^3+(h_1+q)y^3+(q_1+u_1+t_1)z^3 \\
& +(f+2h+2t+2u+2u_2)y^2z+(a+2l+l_1+p+k+2s+2s_1+2v)yz^2 \\
& +(d+2g+h+l+2n+2l_1+m_1+2u+2u_1+2t_2)z^2x \\
& +(c+2n+2r+r_1+2k+2s+2t+2s_1+2t_1+2u_2+2v)zx^2 \\
& +(e+2f+g+2q+r+p_1+2r_1+2t+2s_1+2t_2)x^2y \\
& \qquad\qquad +(b+m+2q_1+2s_2+2u_2+2v)xy^2 \\
& +2(f_1+g_1+h_1+m+m_1+p+p_1+k_1+s+u+t_1+u_1+s_2+t_2)xyz
\end{aligned}\right\} & 3\frac{d^3}{dy^2dz}+\cdots
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+(s+t_1+u_2+v)x^3+(t+u_1+s_2+v)y^3+(u+s_1+t_2+v)z^3\\
&+(f_1+g_1+h_1+l+l_1+q+q_1+k+s+u+s_1+t_1+t_2+u_2)y^2z\\
&+(f+g+h+n+n_1+p+p_1+k_1+s+t+t_1+u_1+s_2+u_2)yz^2\\
&+(f_1+g_1+h_1+m+m_1+r+r_1+k+s+t+t_1+u_1+s_2+u_2)z^2x\\
&+(f+g+h+l+l_1+q+q_1+k_1+t+u+s_1+u_1+s_2+t_2)zx^2\\
&+(f_1+g_1+h_1+n+n_1+p+p_1+k+t+u+s_1+u_1+s_2+t_2)x^2y\\
&+(f+g+h+m+m_1+r+r_1+k_1+s+u+s_1+t_1+t_2+u_2)xy^2\\
&+(a+b+c+d+e+l+m+n+l_1+m_1+n_1+p+q+r+p_1+q_1+r_1\\
&\qquad +s+t+u+s_1+t_1+u_1+s_2+t_2+u_2+v)xyz
\end{aligned}\right\}6\frac{d^3}{dx\,dy\,dz}$$

$$\begin{aligned}
&= a\nabla_1^3+b\nabla_2^3+c\nabla_3^3+d\nabla_4^3+e\nabla_5^3\\
&+f\,(\nabla_2^2\nabla_3+\nabla_2\nabla_3\nabla_2+\nabla_3\nabla_2^2)+g\,(\nabla_3^2\nabla_1+\nabla_3\nabla_1\nabla_3+\nabla_1\nabla_3^2)+h\,(\nabla_1^2\nabla_2+\nabla_1\nabla_2\nabla_1+\nabla_1\nabla_2^2)\\
&+f_1(\nabla_2\nabla_3^2+\nabla_3\nabla_2\nabla_3+\nabla_3^2\nabla_2)+g_1(\nabla_3\nabla_1^2+\nabla_1\nabla_3\nabla_1+\nabla_1^2\nabla_3)+h_1(\nabla_1\nabla_2^2+\nabla_2\nabla_1\nabla_2+\nabla_2^2\nabla_1)\\
&+l\,(\nabla_1^2\nabla_4+\nabla_1\nabla_4\nabla_1+\nabla_4\nabla_1^2)+m\,(\nabla_2^2\nabla_4+\nabla_2\nabla_4\nabla_2+\nabla_4\nabla_2^2)+n\,(\nabla_3^2\nabla_4+\nabla_3\nabla_4\nabla_3+\nabla_4\nabla_3^2)\\
&+l_1(\nabla_1\nabla_4^2+\nabla_4\nabla_1\nabla_4+\nabla_4^2\nabla_1)+m_1(\nabla_2\nabla_4^2+\nabla_4\nabla_2\nabla_4+\nabla_2\nabla_4^2)+n_1(\nabla_3\nabla_4^2+\nabla_4\nabla_3\nabla_4+\nabla_4^2\nabla_3)\\
&+p\,(\nabla_1^2\nabla_5+\nabla_1\nabla_5\nabla_1+\nabla_5\nabla_1^2)+q\,(\nabla_2^2\nabla_5+\nabla_2\nabla_5\nabla_2+\nabla_5\nabla_2^2)+r\,(\nabla_3^2\nabla_5+\nabla_3\nabla_5\nabla_3+\nabla_5\nabla_3^2)\\
&+p_1(\nabla_1\nabla_5^2+\nabla_5\nabla_1\nabla_5+\nabla_5^2\nabla_1)+q_1(\nabla_2\nabla_5^2+\nabla_5\nabla_2\nabla_5+\nabla_5^2\nabla_2)+r_1(\nabla_3\nabla_5^2+\nabla_5\nabla_3\nabla_5+\nabla_5^2\nabla_3)\\
&\qquad+k(\nabla_4^2\nabla_5+\nabla_4\nabla_5\nabla_4+\nabla_5\nabla_4^2)+k_1(\nabla_4\nabla_5^2+\nabla_5\nabla_4\nabla_5+\nabla_5\nabla_4^2)\\
&\qquad+s\,(\nabla_1\nabla_4\nabla_5+\nabla_4\nabla_5\nabla_1+\nabla_5\nabla_1\nabla_4+\nabla_4\nabla_1\nabla_5+\nabla_1\nabla_5\nabla_4+\nabla_5\nabla_4\nabla_1)\\
&\qquad+t\,(\nabla_2\nabla_4\nabla_5+\nabla_4\nabla_5\nabla_2+\nabla_5\nabla_2\nabla_4+\nabla_4\nabla_2\nabla_5+\nabla_2\nabla_5\nabla_4+\nabla_5\nabla_4\nabla_2)\\
&\qquad+u\,(\nabla_3\nabla_4\nabla_5+\nabla_4\nabla_5\nabla_3+\nabla_5\nabla_3\nabla_4+\nabla_4\nabla_3\nabla_5+\nabla_3\nabla_5\nabla_4+\nabla_5\nabla_4\nabla_3)\\
&\qquad+s_1(\nabla_2\nabla_3\nabla_4+\nabla_3\nabla_4\nabla_2+\nabla_4\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_2\nabla_4+\nabla_2\nabla_4\nabla_3+\nabla_4\nabla_3\nabla_2)\\
&\qquad+t_1(\nabla_3\nabla_1\nabla_4+\nabla_1\nabla_4\nabla_3+\nabla_4\nabla_3\nabla_1+\nabla_1\nabla_3\nabla_4+\nabla_3\nabla_4\nabla_1+\nabla_4\nabla_1\nabla_3)\\
&\qquad+u_1(\nabla_1\nabla_2\nabla_4+\nabla_2\nabla_4\nabla_1+\nabla_4\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_1\nabla_4+\nabla_1\nabla_4\nabla_2+\nabla_4\nabla_2\nabla_1)\\
&\qquad+s_2(\nabla_2\nabla_3\nabla_5+\nabla_3\nabla_5\nabla_2+\nabla_5\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_2\nabla_5+\nabla_2\nabla_5\nabla_3+\nabla_5\nabla_3\nabla_2)\\
&\qquad+t_2(\nabla_3\nabla_1\nabla_5+\nabla_1\nabla_5\nabla_3+\nabla_5\nabla_3\nabla_1+\nabla_1\nabla_3\nabla_5+\nabla_3\nabla_5\nabla_1+\nabla_5\nabla_1\nabla_3)\\
&\qquad+u_2(\nabla_1\nabla_2\nabla_5+\nabla_2\nabla_5\nabla_1+\nabla_5\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_1\nabla_5+\nabla_1\nabla_5\nabla_2+\nabla_5\nabla_2\nabla_1)\\
&\qquad+v\,(\nabla_1\nabla_2\nabla_3+\nabla_2\nabla_3\nabla_1+\nabla_3\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_1\nabla_3+\nabla_1\nabla_3\nabla_2+\nabla_3\nabla_2\nabla_1)\\
&-3(t_1+u_1+t_2+u_2)\nabla_1^2-3(u_1+s_1+u_2+s_2)\nabla_2^2-3(s_1+t_1+s_2+t_2)\nabla_3^2-3(s_1+t_1+u_1)\nabla_4^2\\
&\qquad\qquad-3(s_2+t_2+u_2)\nabla_5^2\\
&-3(a+g+h_1+2s)\nabla\nabla_1-3(b+h+f_1+2t)\nabla\nabla_2-3(c+f+g_1+2u)\nabla\nabla_3\\
&\qquad\qquad-3(l+m+n)\nabla\nabla_4-3(p+q+r)\nabla\nabla_5\\
&-(2m+2q+n+r+t_1+2u_1+t_2+2u_2)\nabla_2\nabla_3-(m+q+2n+2r+2t_1+u_1+2t_2+u_2)\nabla_3\nabla_2\\
&-(l+p+2n+2r+2s_1+u_1+2s_2+u_2)\nabla_3\nabla_1-(2l+2p+n+r+s_1+2u_1+s_2+2u_2)\nabla_1\nabla_3
\end{aligned}$$

$$-(2l+2p+m+q+s_1+2t_1+s_2+2t_2)\nabla_1\nabla_2-(l+p+2m+2q+2s_1+t_1+2s_2+t_2)\nabla_2\nabla_1$$
$$-(2h+2p_1+2g_1+m_1+n_1+t+u+2v)\nabla_1\nabla_4-(h+p_1+2m_1+g_1+2n_1+2t+2u+v)\nabla_4\nabla_1$$
$$-(2f+2h_1+l_1+2q_1+n_1+u+s+2v)\nabla_2\nabla_4-(f+h_1+2l_1+q_1+2n_1+2u+2s+v)\nabla_4\nabla_2$$
$$-(2f_1+l_1+m_1+2r_1+2v+s+t+2g)\nabla_3\nabla_4-(f_1+2l_1+2m_1+r_1+v+2s+2t+g)\nabla_4\nabla_3$$
$$-(2g_1+2h+2l_1+q_1+r_1+t+u+2v)\nabla_1\nabla_5-(g_1+h+l_1+2q_1+2r_1+2t+2u+v)\nabla_5\nabla_1$$
$$-(2f+2h_1+p_1+2m_1+r_1+u+s+2v)\nabla_2\nabla_5-(f+h_1+2p_1+m_1+2r_1+2u+2s+v)\nabla_5\nabla_2$$
$$-(2g+p_1+q_1+2n_1+2f_1+s+t+2v)\nabla_3\nabla_5-(g+2p_1+q_1+n_1+f_1+2s+2t+v)\nabla_5\nabla_3$$
$$-3(d+e+s_1+t_1+u_1+s_2+t_2+u_2)\nabla_4\nabla_5$$
$$+2(d+e+3s_1+3t_1+3u_1+3s_2+3t_2+3u_2)\nabla$$
$$+2(a+f+f_1+2g+2h_1+l+m+n+p+q+r+4s+t+u+2v)\nabla_1$$
$$+2(b+2f_1+g+g_1+2h+l+m+n+p+q+r+s+4t+u+2v)\nabla_2$$
$$+2(c+2f+2g_1+h+h_1+l+m+n+p+q+r+s+t+4u+2v)\nabla_3$$
$$+2(2l_1+2m_1+2n_1+p_1+q_1+r_1+s_1+t_1+u_1+2s_2+2t_2+2u_2)\nabla_4$$
$$+2(l_1+m_1+n_1+2p_1+2q_1+2r_1+2s_1+2t_1+2u_1+s_2+t_2+u_2)\nabla_5.$$

Londres, 1861.

Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

In der Theorie der krummen Flächen ist, wie es scheint, den Flächen der Krümmungsmittelpunkte nur eine geringe Aufmerksamkeit zu Theil geworden. Die Bemerkung jedoch, dass die abwickelbare Fläche, welche durch die längs einer Krümmungslinie einer gegebenen Fläche errichteten Normalen gebildet wird, die entsprechende Fläche der Krümmungsmittelpunkte in einer geodätischen Linie schneidet, enthält, wenn wir nicht irren, die wesentlichste Eigenschaft dieser Flächen. Ihre weitere Verfolgung, mit Rücksicht auf einige von *Gauss* in den: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" gegebene Theoreme, führt zu dem Satze, dass die Flächen der Krümmungsmittelpunkte derjenigen Flächen, bei denen in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius allein durch den anderen bestimmt ist, abgeschlossene Klassen auf einander abwickelbarer Flächen bilden. Dieser Satz, der mit der Theorie der auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen im innigsten Zusammenhange steht, ist es, welcher den Gegenstand der folgenden Mittheilung bildet.

Ist der Lauf einer krummen Oberfläche in der Art gegeben, dass die Coordinaten x, y, z eines Punktes derselben bestimmt sind durch die Werthe zweier unabhängigen Variablen p und q, und bezeichnen X, Y, Z die Cosinus der Richtung der Normalen im Punkte (x, y, z), so genügen diese Grössen den Gleichungen:

$$X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}+Z\frac{\partial z}{\partial p} = 0,$$

$$X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Es ist vortheilhaft dieselben in die folgende Form zu bringen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p} = M\frac{\partial X}{\partial p}+N\frac{\partial X}{\partial q}, & \frac{\partial x}{\partial q} = M'\frac{\partial X}{\partial p}+N'\frac{\partial X}{\partial q}, \\ \frac{\partial y}{\partial p} = M\frac{\partial Y}{\partial p}+N\frac{\partial Y}{\partial q}, & \frac{\partial y}{\partial q} = M'\frac{\partial Y}{\partial p}+N'\frac{\partial Y}{\partial q}, \\ \frac{\partial z}{\partial p} = M\frac{\partial Z}{\partial p}+N\frac{\partial Z}{\partial q}, & \frac{\partial z}{\partial q} = M'\frac{\partial Z}{\partial p}+N'\frac{\partial Z}{\partial q}, \end{cases}$$

von welchen Gleichungen nach passender Bestimmung der Grössen M, M', N, N' aus vier dazu geeigneten die zwei übrigen eine Folge der früheren sind *).

Sind (x, y, z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$ zwei unendlich nahe Punkte der krummen Fläche, welche derselben Krümmungslinie angehören, und messen dX, dY, dZ die Unterschiede der Cosinus der Richtung der Normalen für beide Punkte, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:

$$(2.) \qquad dx = \varrho dX, \quad dy = \varrho dY, \quad dz = \varrho dZ,$$

in denen ϱ den Hauptkrümmungsradius bezeichnet, welcher dem durch (x, y, z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$ geführten Normalschnitte angehört; Gleichungen, die die Differentialgleichung der Krümmungslinien vertreten.

Eine Vergleichung dieser Gleichungen mit (1.) zeigt, dass die Differentialgleichung der Krümmungslinien in den Variablen p und q erhalten wird durch Elimination von ϱ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} M dp + M' dq &= \varrho dp, \\ N dp + N' dq &= \varrho dq, \end{aligned}$$

und dass ferner ϱ bestimmt wird durch die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} M-\varrho & M' \\ N & N'-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man die Hauptkrümmungsradien, welche dem durch die Werthe von p und q bestimmten Punkte der betrachteten Oberfläche angehören, durch ϱ und ϱ', so wird:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \varrho+\varrho' = M+N', \\ \varrho\varrho' = MN'-M'N. \end{cases}$$

Aus diesen Beziehungen geht zugleich hervor, dass die Differentialquotienten der Coordinaten einer auf eine Ebene abwickelbaren Fläche nicht in die Form der Gleichungen (1.) gesetzt werden können, in welcher die Grössen M und N im Allgemeinen endlich vorausgesetzt sind.

---

*) Die wirkliche Darstellung der Grössen M, M', N, N' ist für das Folgende entbehrlich. Eine leichte Rechnung ergiebt, wenn man sich der von *Gauss* eingeführten Bezeichnungen bedient:

$$M = \frac{D''E - D'F}{DD'' - D'D'} \sqrt{EG - FF}, \quad N = \frac{-D'E + DF}{DD'' - D'D'} \sqrt{EG - FF},$$

$$M' = \frac{-D'G + D''F}{DD'' - D'D'} \sqrt{EG - FF}, \quad N' = \frac{DG - D'F}{DD'' - D'D'} \sqrt{EG - FF}.$$

Die Variablen p und q bestimmen auf der vorgelegten Fläche zwei Systeme von Curven, in der Art, dass für das eine nur p, für das andere nur q veränderlich ist. Wir wählen für das Folgende diese Variablen so, dass dem ersten Systeme eine Schaar von Krümmungslinien entspreche, dem zweiten aber die Schaar derjenigen Curven, für welche der Hauptkrümmungsradius, der dem gewählten Systeme von Krümmungslinien angehört, unverändert bleibt. Diesen Forderungen geschieht Genüge, wenn man die Variable q aus der Bedingung bestimmt, dass $q = \text{Const.}$ die Gleichungen einer Krümmungslinienschaar darstellt, und wenn man für p den dieser Schaar zugehörigen Krümmungsradius wählt. In Beziehung auf die Variable q bleibe es vorbehalten, eine beliebige Function derselben als neue Variable einzuführen, wodurch die gestellten Bedingungen in Nichts verletzt werden.

Die Einführung der eben definirten Variablen p, q als unabhängiger Variablen ist im Allgemeinen für jede Fläche auf *zwei* Weisen möglich; eine Ausnahme hiervon bilden offenbar die Ebene und die Kugel, für welche sie *gar nicht*, und diejenigen Flächen, deren einer Hauptkrümmungsradius längs der correspondirenden Krümmungslinie unverändert bleibt, wie z. B. die developpabelen und die Canalflächen, für welche diese Einführung nur auf *eine* Weise möglich ist.

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des dem Krümmungsradius $\varrho = p$ entsprechenden Krümmungsmittelpunktes, so ist:

$$(4.)\qquad x-\xi = pX,\quad y-\eta = pY,\quad z-\zeta = pZ.$$

In Beziehung auf den Punkt $\left(x+\frac{\partial x}{\partial p}dp,\, y+\frac{\partial y}{\partial p}dp,\, z+\frac{\partial z}{\partial p}dp\right)$ werden diese Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial p}-\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)dp = p\frac{\partial X}{\partial p}dp + Xdp, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial p}-\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)dp = p\frac{\partial Y}{\partial p}dp + Ydp, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right)dp = p\frac{\partial Z}{\partial p}dp + Zdp. \end{cases}$$

Einer alleinigen Veränderung von p entspricht, vermöge der Definition der Variablen p, q, ein Fortrücken vom Punkte (x, y, z) zum Punkte $(x+dx, y+dy, z+dz)$ der Krümmungslinie $q = \text{Const.}$

In Folge dessen ist nach den Gleichungen (2.)

$$\frac{\partial x}{\partial p}dp = p\frac{\partial X}{\partial p}dp,\qquad \frac{\partial y}{\partial p}dp = p\frac{\partial Y}{\partial p}dp,\qquad \frac{\partial z}{\partial p}dp = p\frac{\partial Z}{\partial p}dp,$$

und die Gleichungen (5.) ergeben:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p} = p\frac{\partial X}{\partial p}, & X = -\frac{\partial \xi}{\partial p}, \\ \frac{\partial y}{\partial p} = p\frac{\partial Y}{\partial p}, & Y = -\frac{\partial \eta}{\partial p}, \\ \frac{\partial z}{\partial p} = p\frac{\partial Z}{\partial p}, & Z = -\frac{\partial \zeta}{\partial p}. \end{cases}$$

Hiernach bestimmen sich die Coordinaten x, y, z durch die Coordinaten des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes folgendermassen:

$$(7.)\quad x = \xi - p\frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad y = \eta - p\frac{\partial \eta}{\partial p}, \quad z = \zeta - p\frac{\partial \zeta}{\partial p}.$$

Die Substitution dieser Werthe von x, y, z, X, Y, Z in die Gleichung:

$$X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

führt auf die folgende:

$$\frac{p}{2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right)^2\right]}{\partial q} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} + \frac{\partial \eta}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial q} + \frac{\partial \zeta}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q}\right) = \frac{p}{2}\frac{\partial E}{\partial q} - F = 0,$$

welche sich wegen:

$$E = X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

in

$$(8.)\quad 0 = \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} + \frac{\partial \eta}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial q} + \frac{\partial \zeta}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = F$$

verwandelt.

Aus derselben folgt, dass auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte den Variablen p und q zwei Systeme von Curven entsprechen, welche sich in jedem Punkte unter rechten Winkeln schneiden. Dasjenige dieser Systeme, für welches allein p veränderlich ist, ist, wie bekannt, ein System geodätischer Linien.

Vergleicht man die erste Reihe der Gleichungen (6.) mit den Gleichungen (1.), so bemerkt man, dass für die gewählten Variablen

$$M = p, \qquad N = 0$$

wird. Die in (3.) gegebenen Bestimmungen der Hauptkrümmungsradien zeigen alsdann, dass N' identisch ist mit dem zweiten Hauptkrümmungshalbmesser ϱ', welcher in der Folge der Analogie wegen durch p' bezeichnet ist.

Mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen und nach Substitution der Werthe von x, y, z, X, Y, Z in ξ, η, ζ, stellt sich die zweite Reihe der

Gleichungen (1.) in folgender Form dar:

$$\frac{\partial\xi}{\partial q}-p\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} = -M'\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2}-p'\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial q}-p\frac{\partial^2\eta}{\partial p\partial q} = -M'\frac{\partial^2\eta}{\partial p^2}-p'\frac{\partial^2\eta}{\partial p\partial q},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial q}-p\frac{\partial^2\zeta}{\partial p\partial q} = -M'\frac{\partial^2\zeta}{\partial p^2}-p'\frac{\partial^2\zeta}{\partial p\partial q},$$

welche Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $\frac{\partial\xi}{\partial q}$, $\frac{\partial\eta}{\partial q}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial q}$ multiplicirt und addirt hat, die Beziehung:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2 = -M'\left(\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\right)+\frac{p-p'}{2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2\right]}{\partial p}$$

ergeben. Bezeichnet man durch G die Summe:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2,$$

so wird, wenn man den, wegen $F=0$ und $\frac{\partial E}{\partial q}=0$, verschwindenden Theil unterdrückt:

$$G = \frac{p-p'}{2}\frac{\partial G}{\partial p}$$

und folglich:

$$G = Qe^{2\int\frac{dp}{p-p'}},$$

wo Q eine Function von q allein bezeichnet.

Die Functionen ξ, η, ζ genügen daher den Differentialgleichungen:

$$E=\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)^2 = 1,$$

$$F=\frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q}+\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q}+\frac{\partial\zeta}{\partial p}\frac{\partial\zeta}{\partial q} = 0,$$

$$G=\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2 = Qe^{2\int\frac{dp}{p-p'}},$$

in welchen Gleichungen man, unbeschadet der Allgemeinheit, $Q=1$ setzen kann, was mit der Einführung von

$$\int\sqrt{Q}\,dq$$

als neuer Variablen aequivalent ist.

Diese bemerkenswerthen Relationen führen unter der Voraussetzung, dass p', d. i. der zweite Hauptkrümmungsradius der vorgelegten Fläche, nur

von p abhänge, dass dieser also der Bedingung

$$p' = \lambda(p),$$

welcher ohne Weiteres eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zu substituiren ist, genüge, auf die oben ausgesprochenen mit der Theorie der abwickelbaren Flächen zusammenhängenden Folgerungen.

Unter dieser Voraussetzung erhält man:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = e^{2\int\frac{dp}{p-\lambda(p)}} = \varphi(p).$$

Das Linienelement $d\sigma$ der Fläche der Krümmungsmittelpunkte, welche dem Radius p entspricht, wird also:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dp^2 + \varphi(p)\,dq^2,$$

ein Ausdruck, welcher durch die Wahl der Variablen p und q dem Linienelemente der Fläche der Krümmungsmittelpunkte jeder krummen Oberfläche, welche der Differentialgleichung

$$p' = \lambda(p)$$

genügt, gegeben werden kann.

Es besteht daher folgendes Theorem:

Die Flächen der Krümmungsmittelpunkte aller Oberflächen, bei denen auf gleiche Weise in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius allein durch den anderen bestimmt ist, sind auf einander abwickelbar.

Es ist zu untersuchen, ob die durch das eben ausgesprochene Theorem gegebenen Flächen, deren Linienelement sich in die Form

$$dp^2 + \varphi(p)\,dq^2$$

setzen lässt, die einzigen sind, denen diese Eigenschaft zukommt. Diese Form ist bekanntlich diejenige, die bei passender Bestimmung der Function $\varphi(p)$ dem Linienelemente einer jeden Umdrehungsfläche gegeben werden kann. Unsere Frage ist daher identisch mit der: ob eine jede auf eine gegebene Umdrehungsfläche aufwickelbare krumme Oberfläche in dem Systeme der Krümmungsmittelpunktsflächen einer durch die Gleichung $p' = \lambda(p)$ characterisirten Flächenfamilie enthalten ist.

Es seien

$$u = r\cos q,$$
$$v = r\sin q,$$
$$w = F(r)$$

die Gleichungen einer Rotationsfläche. Für das Quadrat des Linienelementes ergiebt sich:

$$du^2+dv^2+dw^2 = (1+F'(r)^2)dr^2+r^2dq^2.$$

Die Substitution

$$p = \int\sqrt{1+F'(r)^2}\,dr,$$

aus welcher folge:

$$r^2 = \varphi(p),$$

giebt demselben die verlangte Form:

$$du^2+dv^2+dw^2 = dp^2+\varphi(p)dq^2.$$

Bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten des dem Punkte (u, v, w) bei der Abwickelung correspondirenden Punktes einer auf die Rotationsfläche abwickelbaren Fläche S. Drei bestimmten Werthen u, v, w entsprechen drei zugehörige ξ, η, ζ. Die ersten sind bestimmt durch gewählte Werthe von p und q, in Folge dessen auch die letzten. Es sind daher ξ, η, ζ Functionen von p und q, welche nach dem Begriffe der Abwickelbarkeit die Bedingung

$$du^2+dv^2+dw^2 = d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$$

verificiren müssen. Sie erfüllen alsdann die partiellen Differentialgleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} 1 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)^2, \\ 0 = \frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q}+\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q}+\frac{\partial\zeta}{\partial p}\frac{\partial\zeta}{\partial q}, \\ \varphi(p) = \left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2. \end{cases}$$

Man betrachte jetzt die Grössen

$$(10.)\quad \begin{cases} x = \xi-p\frac{\partial\xi}{\partial p}, \\ y = \eta-p\frac{\partial\eta}{\partial p}, \\ z = \zeta-p\frac{\partial\zeta}{\partial p}, \end{cases}$$

was allgemein zu reden möglich ist, als die Coordinaten eines Punktes einer dritten Fläche T, und bezeichne der Kürze wegen durch X, Y, Z die Differentialquotienten: $-\frac{\partial\xi}{\partial p}$, $-\frac{\partial\eta}{\partial p}$, $-\frac{\partial\zeta}{\partial p}$. Alsdann sind die Gleichungen

$$Xdx+Ydy+Zdz = 0,$$
$$X^2+Y^2+Z^2 = 1$$

eine Folge der nach der Voraussetzung erfüllten Gleichungen (9.), und sie lehren, dass X, Y, Z die Cosinus der Richtung der Normalen im Punkte (x, y, z) der Fläche T sind. Es ist leicht, die geometrische Bedeutung der Variablen p, q in Beziehung auf diese Fläche zu ermitteln. Man hat nur die Werthe der Coordinaten x, y, z und der Cosinus X, Y, Z in die Gleichungen (1.) einzuführen, um zu bemerken, dass wegen der identisch erfüllten Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = p\frac{\partial X}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = p\frac{\partial Y}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial p} = p\frac{\partial Z}{\partial p},$$

die Relationen

$$M = p, \quad N = 0$$

stattfinden. In Folge dessen erhält man zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte der Fläche T die Gleichungen:

$$\varrho + \varrho' = p + N',$$
$$\varrho\varrho' = pN'.$$

Aus ihnen und dem Systeme der vorhergehenden ersieht man, dass die Grössen q, p, N' der Reihe nach mit dem Parameter der einen Schaar von Krümmungslinien der Fläche T, dem ihnen entsprechenden Hauptkrümmungsradius und dem anderen p' identisch sind.

Eine schon durchgeführte Behandlung der zweiten Reihe der Gleichungen (1.) führt wieder auf die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial q}\right)^2 = \frac{p-p'}{2}\,\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial q}\right)^2\right]}{\partial p},$$

welche sich vermöge der letzten der Gleichungen (9.) in

$$\varphi(p) = \frac{p-p'}{2}\varphi'(p)$$

verwandelt. Aus dieser ergiebt sich:

$$(11.) \qquad p' = p - \sqrt{\varphi(p)}\,\frac{dp}{d\sqrt{\varphi(p)}} = \lambda(p).$$

Die Fläche T gehört daher zu der Klasse derjenigen Flächen, bei denen in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius durch den anderen allein bestimmt ist. Sie hat die Fläche S, wie die Gleichungen (10.), wenn man ihnen die Form

$$x - \xi = pX, \quad y - \eta = pY, \quad z - \zeta = pZ$$

giebt, lehren, zur Fläche der Krümmungsmittelpunkte.

Das Ergebniss unserer Untersuchung würde daher das Resultat sein, dass die Klasse derjenigen Flächen, deren Linienelement die Form

$$dp^2+\varphi(p)dq^2$$

gegeben werden kann, in der That congruent ist mit dem Systeme der dem Hauptkrümmungsradius ϱ entsprechenden Schaalen der Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer durch die partielle Differentialgleichung

$$\varrho' = \varrho-\sqrt{\varphi(\varrho)}\,\frac{d\varrho}{d\sqrt{\varphi(\varrho)}} = \lambda(\varrho)$$

characterisirten Flächenfamilie, wenn nicht ein Umstand zu berücksichtigen wäre, der dieses Resultat, obgleich nicht wesentlich, beeinträchtigt. Die eben aus den Gleichungen (10.) gezogenen Folgerungen sind nämlich illusorisch in dem Falle, dass diese Gleichungen den Lauf einer Fläche nicht bestimmen. Alsdann aber sind die Grössen x, y, z bestimmt durch die Werthe einer einzigen Veränderlichen τ, die selbst Function beider Variablen p, q oder einer von ihnen sein wird. Die in Folge der Gleichungen (9.) identisch erfüllten Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial p}\,\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\,\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\,\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\,\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\,\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\,\frac{\partial \zeta}{\partial q} = \varphi(p)-\tfrac{1}{2}p\varphi'(p)$$

werden unter dieser Voraussetzung:

$$(12.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial q}+\dfrac{\partial y}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial q}+\dfrac{\partial z}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial q}\right)\dfrac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial q}+\dfrac{\partial y}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial q}+\dfrac{\partial z}{\partial \tau}\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial q}\right)\dfrac{\partial \tau}{\partial q} = \varphi(p)-\tfrac{1}{2}p\varphi'(p). \end{cases}$$

Das Bestehen dieser Gleichungen verlangt entweder

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}\,\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial \tau}\,\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial \tau}\,\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0.$$

Ist die erste dieser Bedingungen erfüllt, so erfordert die zweite der Gleichungen (12.), dass:

$$(13.)\quad \varphi(p)=\tfrac{1}{2}p\varphi'(p),\quad \text{also:}\quad \varphi(p)=cp^2,$$

und folglich:

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2 = dp^2+cp^2dq^2;$$

eine Form des Linienelementes, die nur einer auf eine Ebene abwickelbaren

Fläche zukommt, welche Eigenschaft für die Fläche S nicht vorausgesetzt sein soll.

Die Erfüllung der anderen Bedingung $\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0$ reducirt die drei Grössen x, y, z auf drei Functionen V, V', V'' von q allein, wonach ξ, η, ζ von der Form

$$(14.)\qquad \begin{cases} \xi = pU + V, \\ \eta = pU' + V', \\ \zeta = pU'' + V'' \end{cases}$$

sein müssen, in welchen Gleichung U, U', U'' ebenfalls nur durch q bestimmte Grössen andeuten. Da in dem Linienelemente der durch diese Gleichungen dargestellten Flächen der Coefficient $\varphi(p)$ von dq^2 nur Function von p sein soll, so tritt der zu behandelnde Fall nur ein, wenn

$$\varphi(p) = \alpha p^2 + 2\beta p + \gamma,$$

wo α, β, γ Constante bezeichnen, oder ebenso allgemein durch eine Verschiebung des Anfangspunktes von p, wenn

$$(15.)\qquad \varphi(p) = \alpha p^2 + \gamma.$$

Diese Form von $\varphi(p)$, in welcher die durch (13.) gegebene enthalten ist, ist daher die einzige, mit welcher das Eintreten des eben erörterten Umstandes verknüpft sein kann. Zur vollständigen Ermittelung der Flächen, deren Linienelement sich in die Form

$$d\sigma^2 = dp^2 + (\alpha p^2 + \gamma) dq^2$$

bringen lässt, ist folglich die Kenntniss der durch die aus (11.) hervorgehende partielle Differentialgleichung

$$\varrho \varrho' = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

definirten Flächen nicht hinreichend, sondern es ist noch den entsprechenden Krümmungsmittelpunktsflächen die Familie der aus geraden Erzeugungslinien gebildeten Flächen (14.) mit der Bedingung, dass das Linienelement die verlangte Form annimmt, beizugesellen. Es hat keine Schwierigkeit, die sechs Functionen U und V der Gleichungen (14.) dieser Bedingung gemäss durch eine willkürlich bleibende zu bestimmen. Unter den durch sie dargestellten Flächen ist z. B. die Schraubenfläche

$$\xi = p \cos q, \quad \eta = p \sin q, \quad \zeta = aq$$

enthalten, deren Linienelement gleich $dp^2 + (p^2 + a^2) dq^2$ wird, und die sich nicht

wie die Umdrehungsfläche der Kettenlinie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welche dasselbe Linienelement liefert, als die Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer Fläche von constanter negativer Krümmung $-\frac{1}{a^2}$ ansehen lässt.

Aus dem eben Bewiesenen ergeben sich folgende auf die Theorie der auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen bezügliche Sätze, welche, nach Erledigung des auf die partielle Differentialgleichung $\varrho\varrho' = c$ bezüglichen Ausnahmefalles, ohne Rücksicht auf denselben ausgesprochen sind:

Das System der dem Hauptkrümmungsradius ϱ entsprechenden Schaalen der Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer durch die partielle Differentialgleichung

$$\varrho' = \lambda(\varrho)$$

characterisirten Flächenfamilie, constituirt eine abgeschlossene Klasse von auf einander abwickelbaren Flächen, als deren Repräsentant eine mit der Function λ bestimmte Rotationsfläche angesehen werden kann.

Und umgekehrt:

Die Klasse der auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbaren Flächen ist congruent mit dem Systeme der dem Radius ϱ entsprechenden Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer durch die partielle Differentialgleichung

$$\varrho' = \lambda(\varrho)$$

charakterisirten Flächenfamilie, in welcher die Function λ der vorgelegten Rotationsfläche gemäss zu bestimmen ist.

Diese Theoreme, welche eine nothwendige und hinreichende Eigenschaft der auf Rotationsflächen auflegbaren Flächen kennen lehren, führen wenigstens in *einem* Falle zur endlichen Darstellung einer vollständigen Klasse von auf eine specielle Rotationsfläche abwickelbaren Flächen. Es ist dies der Fall, in welchem die zwischen ϱ und ϱ' stattfindende Gleichung diejenige der Flächen kleinster Oberfläche

$$\varrho + \varrho' = 0$$

wird, deren Integration bekannt ist. Unter dieser Bedingung ist der gemeinschaftliche Ausdruck des Linienelementes aller Krümmungsmittelpunktsflächen dieser Flächenfamilie:

$$d\sigma^2 = dp^2 + p\,dq^2.$$

Die Umdrehungsfläche, deren Linienelement diese Form annimmt, findet sich durch eine leichte Rechnung als durch die Gleichungen

$$\zeta = -\frac{r}{2}\sqrt{4r^2-1}+\tfrac{1}{4}\log(2r+\sqrt{4r^2-1}),$$
$$r = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

gegeben. In der That, setzt man:

$$\xi = \sqrt{p}\cos q,$$
$$\eta = \sqrt{p}\sin q,$$
$$\zeta = -\tfrac{1}{2}\sqrt{p(4p-1)}+\tfrac{1}{4}\log(2\sqrt{p}+\sqrt{4p-1}),$$

so ergiebt sich:

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2 = dp^2+pdq^2,$$

wie verlangt wurde. Die Meridiancurve dieser Umdrehungsfläche ist, wie man weiss, die Evolute der Kettenlinie:

$$y = \tfrac{1}{8}(e^{4x}+e^{-4x}),$$

ein Resultat, welches auch ohne Rechnung ersichtlich ist, wenn man sich daran erinnert, dass die Umdrehungsfläche einer jeden Kettenlinie (um die entsprechende Axe) eine Fläche ist, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\varrho+\varrho' = 0$$

Genüge leistet, und folglich ist die Umdrehungsfläche ihrer Evolute die entsprechende Fläche der Krümmungsmittelpunkte.

Die Flächen der Krümmungsmittelpunkte der Flächen kleinster Oberfläche bilden daher die Klasse der auf die Rotationsfläche einer oder richtiger jeder Kettenlinienevolute abwickelbaren Flächen.

Was schliesslich die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen betrifft, welche sich unseren Betrachtungen wegen der Form, in welcher dieselben geführt wurden, entzogen haben, so überzeugt man sich leicht und auf verschiedenen Wegen, dass die Flächen ihrer Krümmungsmittelpunkte, wenn solche existiren, wiederum auf eine Ebene abwickelbare Flächen sind.

Berlin, im Juni 1861.

Zur Lehre von den Raumcurven und Flächen.

(Von Herrn *Joh. Nik. Bischoff* zu München.)

Es seien:

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1, s_1) = 0, \\ \varphi(x_1, y_1, z_1, s_1) = 0, \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} F(x_2, y_2, z_2, s_2) = 0, \\ \Phi(x_2, y_2, z_2, s_2) = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Raumcurven mn^{ter} und pq^{ter} Ordnung.

Der Grad der abwickelbaren Fläche S, deren Erzeugende die beiden Curven (1.) und (2.) beständig schneidet, ist so gross als die Anzahl von Werthen (x_1, y_1, z_1) oder (x_2, y_2, z_2), welche den Gleichungen (1.) und (2.) und den folgenden:

$$(3.)\quad y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0,$$

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix} = 0$$

zugleich genügen. Daher ist $mnpq(m+n+p+q-4)$ der Grad der Fläche S. Da jede Tangente der Curve (1.) von $pq(p+q-2)$ Tangenten der Curve (2.) und jede Tangente der letzteren Curve von $mn(m+n-2)$ Tangenten der ersten geschnitten wird, so ist die Curve (1.) eine $pq(p+q-2)$fache und die Curve (2.) eine $mn(m+n-2)$fache Linie der Fläche S, deren Klasse die $mnpq(m+n-2)(p+q-2)^{\text{te}}$ ist.

Die Coefficienten in der Gleichung einer Ebene, die für die Curve (1.) im Punkte (x_1, y_1, z_1) Schmiegungsebene ist, sind Functionen der (x_1, y_1, z_1) von der $3(m+n-3)^{\text{ten}}$ Dimension, und da diese Coefficienten, wenn die nämliche Ebene auch noch die Curve (2.) berühren soll, einer Bedingungsgleichung genügen müssen, welche hinsichtlich dieser Coefficienten auf die $pq(p+q-2)^{\text{te}}$ Dimension steigt, so giebt es auf der Curve (1.): $3mnpq(m+n-3)(p+q-2)$

solche Punkte (x_1, y_1, z_1), deren Schmiegungsebenen zugleich die Curve (2.) berühren. Jede solche Schmiegungsebene ist aber Wendungsberührebene der Fläche S, folglich hat S:

$$3mnpq\{(m+n-3)(p+q-2)+(p+q-3)(m+n-2)\}$$

Wendungsberührebenen.

Sei jetzt für einen Augenblick g der Grad, k die Klasse der Fläche S, d und r die Ordnungen ihrer Doppel- und Rückkehrcurve, w die Anzahl der Wendungsberührebenen, dann folgt aus den bekannten Gleichungen

$$g(g-1) = k+2d+3r,$$
$$3g(g-2) = 6d+8r+w$$

die nachstehende:

$$r = 3mnpq(m+n-2)(p+q-2).$$

Da durch jeden Punkt des Raumes $\frac{1}{2}m^2n^2(m+n-2)^2-mn(5m+5n-14)$ Doppelberührebenen der Curve (1.) gehen, so sind die Coefficienten in der Gleichung einer Ebene, welche die Curve (1.) in den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_1', y_1', z_1') berührt, Functionen der Coordinaten des einen dieser Punkte von der $\{mn(m+n-2)^2-2(5m+5n-14)\}^{\text{ten}}$ Dimension, und da diese Coefficienten, wenn die nämliche Ebene auch noch die Curve (2.) berühren soll, einer Bedingungsgleichung genügen müssen, die hinsichtlich dieser Coefficienten auf die $pq(p+q-2)^{\text{te}}$ Dimension steigt, so giebt es auf der Curve (1.)

$$\tfrac{1}{2}mnpq(p+q-2)\{mn(m+n-2)^2-2(5m+5n-14)\}$$

solche Punktpaare (x_1, y_1, z_1), (x_1', y_1', z_1'), deren Tangenten in einer Ebene liegen, die zugleich die Curve (2.) berührt. Jede solche Ebene ist aber dreifache Berührebene der Fläche S; daher hat S eine Anzahl von

$$\tfrac{1}{2}mnpq(p+q-2)\{mn(m+n-2)^2-2(5m+5n-14)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}mnpq(m+n-2)\{pq(p+q-2)^2-2(5p+5q-14)\}$$

dreifachen Berührebenen.

Lässt man F mit f, Φ mit φ zusammenfallen und eliminirt aus (2.), (3.) und (4.) die Coordinaten (x_2, y_2, z_2), so erhält man eine Gleichung (h.) von der $2mn(m+n-2)^{\text{ten}}$ Dimension in x_1, y_1, z_1, welche verbunden mit (1.) diejenigen Punktpaare (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) auf der Curve (1.) liefert, deren Tangenten in einer Ebene liegen und deren Verbindungslinie die Axe x schneidet. Die Gleichung (h.) zerfällt aber offenbar erstens in die Gleichung der abwickelbaren Fläche W von der Ordnung $mn(m+n-2)$, welche die

Tangenten der Curve (1.) zu Erzeugenden hat, und zweitens in die Gleichung einer Fläche V ebenfalls von der Ordnung $mn(m+n-2)$, welche allein durch ihren Schnitt mit der Curve (1.) die obengenannten Punktpaare (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) giebt. Da die Axe der x von der Fläche W selbst in $mn(m+n-2)$ Punkten geschnitten wird, so muss die Fläche V die Curve (1.) in ebenso vielen Punkten berühren und ausserdem die nämliche Curve noch in $\frac{1}{2}mn(mn-2)(m+n-2)$ Punktpaaren schneiden.

Daher ist der Grad der abwickelbaren Fläche U, deren Erzeugende die Curve (1.) zweimal schneiden,

$$\tfrac{1}{2}mn(mn-2)(m+n-2).$$

Da jede Tangente der Curve (1.) von $\{mn(m+n-2)-4\}$ anderen Tangenten der nämlichen Curve getroffen wird, so ist die Curve (1.) selbst eine $\{mn(m+n-2)-4\}$ fache Linie der Fläche U.

Für die Klasse der U hat man: $\frac{1}{2}m^2n^2(m+n-2)^2-mn(5m+5n-14)$ und für die Anzahl ihrer Wendungsberührebenen: $mn(3m+3n-10)\{mn(m+n-2)-8\}$. Man schliesst hieraus, dass die Ordnung der Rückkehrcurve die

$$\frac{mn(3m+3n-11)}{2}\{mn(m+n-2)-8\}^{\text{te}} \text{ ist.}$$

Für die Anzahl $\mathfrak{t}$ der dreifachen Berührebenen von U ergiebt sich nun, wenn man für einen Augenblick $\mathfrak{g}$ den Grad und $\mathfrak{w}$ die Anzahl der Wendungsberührebenen von U nennt:

$$\tfrac{1}{2}m^2n^2(m+n-2)\{mn(m+n-2)^2-2(5m+5n-14)\} = 2mn.\mathfrak{g}+3\mathfrak{t}+3\mathfrak{w}$$

oder:

$$\mathfrak{t} = \tfrac{1}{6}m^2n^2(m+n-2)\{mn(m+n-2)^2-2(mn+5m+5n-16)\}$$
$$-mn(3m+3n-10)\{mn(m+n-2)-8\}.$$

München, 1861.

11603

